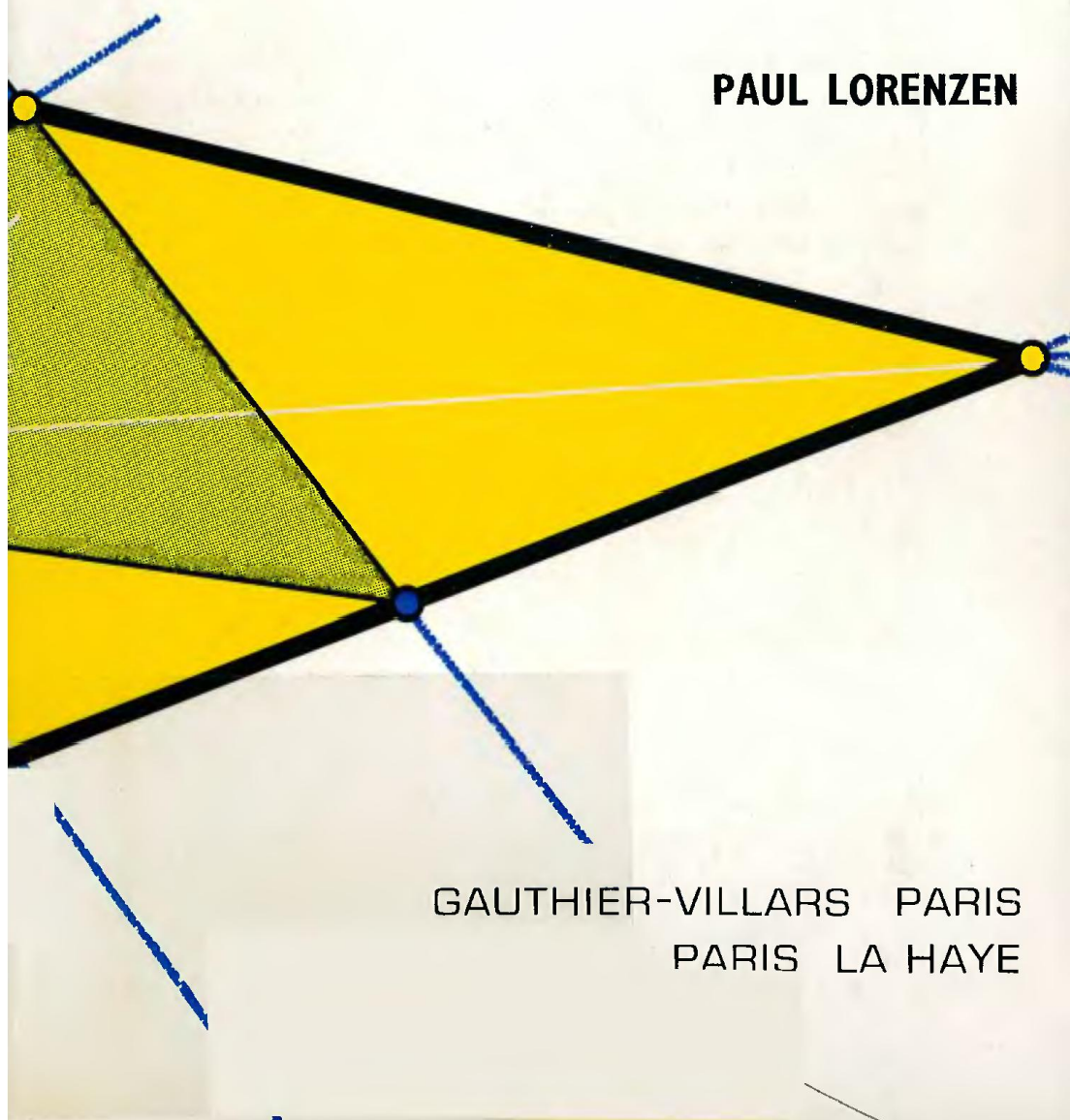


MÉTAMATHÉMATIQUE

PAUL LORENZEN



GAUTHIER-VILLARS PARIS
PARIS LA HAYE

MÉTAMATHÉMATIQUE

Cet ouvrage est une introduction à la métamathématique. L'un des avantages de l'ouvrage est d'économiser l'appareil des fonctions récursives, un autre de toujours distinguer nettement ce qui relève des seules méthodes constructives de ce qui exige des méthodes classiques.

La logique y est présentée de façon originale à l'aide de « dialogues » qui reposent sur les procédés de la déduction naturelle dus à Gentzen. Les bases proprement logiques une fois posées, l'auteur construit une formalisation de l'arithmétique avec induction infinie. Il démontre leur consistance et leur incomplétude. Un chapitre est consacré à l'arithmétisation des formalismes et conduit aux théorèmes de Gödel. Le problème de la décidabilité de quelques structures fondamentales de l'algèbre (groupe, anneau, corps algébrique et réel formés) fait l'objet du dernier chapitre.

GAUTHIER-VILLARS

PARIS

MÉTAMATHÉMATIQUE

ÉCOLE PRATIQUE DES HAUTES ÉTUDES — SORBONNE
SIXIÈME SECTION : SCIENCES ÉCONOMIQUES ET SOCIALES

MATHÉMATIQUES
ET SCIENCES DE L'HOMME

VI

MCMLXVII

Éditions GAUTHIER-VILLARS
55, quai des Grands-Augustins
Paris-6^e

PAUL LORENZEN

MÉTAMATHÉMATIQUE

Traduit de l'allemand par
J. B. GRIZE

MCMLXVII

Éditions MOUTON
45, rue de Lille
Paris-7^e

© ÉDITIONS GAUTHIER-VILLARS
ÉDITIONS MOUTON
ÉCOLE PRATIQUE DES HAUTES ÉTUDES
1967

Édition originale
PAUL LORENZEN — METAMATHEMATIK
Bibliographisches Institut AG, Mannheim
Collection Hochschultaschenbücher

TABLE DES MATIÈRES

<i>Introduction</i>	7
 <i>Chapitre premier : Formalisation de la logique</i>	
§ 1. La logique classique des joncteurs	15
§ 2. Logique effective des joncteurs et des quantificateurs	18
§ 3. Logique classique des quantificateurs	33
§ 4. Logique de l'égalité	39
 <i>Chapitre II : Formalisation de l'arithmétique</i>	
§ 5. Arithmétique constructive et arithmétique axiomatique	49
§ 6. Formalisation de l'arithmétique classique	60
§ 7. Consistance de l'arithmétique classique	72
 <i>Chapitre III : Arithmétisation des formalismes</i>	
§ 8. Formalismes complets	82
§ 9. Décidabilité	93
§ 10. Réalisation arithmétique	102
§ 11. Représentation arithmétique	109
§ 12. Indécidabilité et incomplétude	118
 <i>Chapitre IV : Décidabilité des théories axiomatiques</i>	
§ 13. Théories axiomatiques	130
§ 14. Théories axiomatiques indécidables	135
§ 15. Théories axiomatiques complètes	144
 <i>Ouvrages cités</i>	160
 <i>Index des matières</i>	162

INTRODUCTION

Le concept de métamathématique a été marqué du sceau de HILBERT. Par un vague rappel de la vieille expression « métaphysique », il devait désigner une science dont l'objet serait l'ensemble des mathématiques. Cette métamathématique toutefois ne devait pas être, comme la métaphysique, une discipline philosophique, mais une théorie mathématique.

Il y a évidemment une difficulté à définir ainsi la métamathématique. Si elle doit être une théorie mathématique, théorie qui porte sur la totalité des mathématiques, elle doit aussi se prendre elle-même comme objet. La difficulté cependant disparaît si on remarque que, dans la définition, l'adjectif « mathématique » et le substantif « les mathématiques » ne renvoient pas au même objet. On parle en fait d'une théorie mathématique *constructive* qui a pour objet l'ensemble des mathématiques en tant que théories *axiomatiques*. Cette définition n'est alors manifestement plus circulaire et nous allons, pour préciser la notion, retracer brièvement la problématique de HILBERT.

Un des faits les plus saillants du XIX^e siècle est la « découverte » des géométries non euclidiennes. Il s'agit, en gros, de la preuve que l'axiome des parallèles d'EUCLIDE est logiquement indépendant des autres axiomes euclidiens. BELTRAMI (1868) et KLEIN (1870), en s'appuyant sur les travaux de SACCHERI, de LAMBERT et tout particulièrement sur ceux de GAUSS, de LOBATCHEVSKY et de J. BOLYAI, ont prouvé cette indépendance en fournissant des modèles dans lesquels tous les axiomes d'EUCLIDE étaient satisfaits, à la seule exception de celui des parallèles.

Puisque, raisonnait-on, la géométrie d'EUCLIDE est consistante, tout système de propositions valides dans un modèle non euclidien le sera aussi. En particulier, le système constitué par la négation de l'axiome des parallèles et par les autres axiomes euclidiens est consistant. L'indépendance logique dont il est question ne signifie rien d'autre.

On examina ensuite de plus près la consistance de la géométrie euclidienne. On commença par améliorer et par compléter l'axiomatisation de la géométrie d'EUCLIDE jusqu'à pouvoir s'assurer que tous les théorèmes alors connus pouvaient effectivement se déduire des axiomes de base par la seule logique, c'est-à-dire sans recourir à aucune intuition géométrique. Ce premier effort aboutit en 1899 aux *Grundlagen der Geometrie* de HILBERT.

Dès lors qu'on disposait d'une axiomatique sans faille, on pouvait s'assurer

que la géométrie euclidienne possédait un modèle analytique. A vrai dire, on le savait déjà depuis DESCARTES (1637), à qui l'on doit en effet la traduction des propositions géométriques en propositions analytiques, c'est-à-dire en propositions sur les nombres réels. Néanmoins seule une axiomatique sans défauts permettait de passer légitimement de la consistance du modèle analytique à celle de la géométrie d'EUCLIDE dont on avait besoin pour la consistance de la géométrie non euclidienne.

Ainsi le problème devint celui de la « consistance des modèles analytiques ». Cette façon de parler est d'ailleurs assez peu correcte. Ce n'est qu'un système de propositions qui peut impliquer contradiction, de sorte que seul un tel système peut, à proprement parler, être dit « consistant » (et ceci dans le cas où il n'implique aucune contradiction, c'est-à-dire aucune proposition de la forme « A et non- A »). Formulée de façon précise, la question est donc de savoir si un système quelconque de propositions qui sont valides dans un modèle analytique est consistant.

Un modèle analytique est tout simplement un ensemble d'objets analytiques (couples de nombres, équations linéaires, etc.) entre lesquels sont définies certaines relations analytiques (par exemple l'égalité, la résolubilité d'une équation linéaire par un couple de nombres, etc.). Une proposition qui est valide dans un tel modèle ne se distingue donc en rien de toute autre proposition analytique, chacune exprimant en effet toujours l'existence d'une relation analytique entre des objets analytiques.

Il s'ensuit que la consistance d'un modèle analytique n'est rien d'autre que celle du système de tous les théorèmes. Mais c'est ici que commence la véritable difficulté, difficulté qui n'a guère été encore résolue à la satisfaction générale des mathématiciens. Ce n'est en effet pas à l'ensemble du problème, mais à l'une de ses parties essentielles seulement, que la métamathématique de HILBERT s'est attaquée avec succès depuis 1918 environ. Elle a d'ailleurs conduit en même temps les mathématiques à de nouveaux problèmes et à de nouveaux résultats. Enfin, sous l'influence prépondérante des travaux de TARSKI, les méthodes métamathématiques de ces dernières décennies ont pénétré toujours plus profondément dans le domaine de l'algèbre (cf. Ch. IV).

Tout le complexe de problèmes lié à la consistance de l'analyse a pris forme sous l'influence de tendances diverses que nous allons encore esquisser rapidement.

Dès l'Antiquité, une arithmétique indo-arabe s'est développée en marge de la tradition géométrique grecque. A partir de la Renaissance, et particulièrement au XVII^e siècle, ces deux courants fusionnèrent en Europe sous l'espèce du calcul infinitésimal et de la géométrie infinitésimale, c'est-à-dire sous la forme de notre analyse classique. Le XIX^e siècle tenta d'arithmétiser

l'analyse, soit de réduire la théorie des nombres réels à celle des nombres dits naturels $0, 1, 2, \dots$. Cette tentative conduisit alors CANTOR, DEDEKIND et WEIERSTRASS à l'idée que, à côté de la construction des nombres naturels (et de celle des fonctions définissables inductivement sur eux, comme l'addition et la multiplication), l'édification de l'analyse exigeait encore certains procédés pour former des ensembles de nombres, des ensembles d'ensembles de nombres, et ainsi de suite. C'est ainsi que — grâce avant tout à CANTOR — la théorie des ensembles se constitua en discipline autonome. Cependant, dès les années 1900 environ, on s'aperçut que certaines hypothèses touchant la possibilité d'engendrer de tels ensembles conduisaient, encore qu'on les tint pour évidentes, à des contradictions. La fameuse antinomie de RUSSELL sur l'ensemble de tous les ensembles qui ne se contiennent pas comme élément en est une. Les esprits se divisèrent, et se divisent encore, à leur sujet. Les uns, appelons-les les constructivistes (POINCARÉ, BROUWER, WEYL), défendaient l'idée qu'il ne fallait en somme faire aucune hypothèse sur l'existence des ensembles et qu'on devait se limiter aux seuls ensembles qu'on pouvait construire. Les avis divergèrent naturellement sur ce qui était « constructible ». C'est qu'il n'existe pas un domaine bien délimité de *toutes* les méthodes de construction. Les autres, les axiomaticiens (ZERMELO, HILBERT, FRAENKEL), prétendaient en revanche qu'il fallait chercher des axiomes pour la théorie des ensembles, qui permettraient de refaire le plus simplement possible les déductions un peu naïves de l'analyse classique, mais sans tomber pour autant dans les contradictions. Cette recherche fut apparemment couronnée de succès. Le système de ZERMELO-FRAENKEL par exemple permet de dériver aisément tous les théorèmes de l'analyse classique (du sens primitif desquels il faut, bien entendu, faire alors abstraction). Enfin jusqu'à maintenant, aucune contradiction n'a été dérivée des axiomes du système, bien qu'on ne soit pas encore parvenu à en prouver la consistance.

Dans les années vingt, une lutte serrée s'engagea entre les deux tendances. BROUWER avait pris la tête du mouvement constructiviste et HILBERT celle du mouvement axiomatique. Aucune ne put supplanter l'autre, bien que les axiomaticiens l'emportassent en ce qu'ils rallièrent à eux la plupart des mathématiciens qui ne s'intéressaient pas particulièrement au problème des fondements. De sorte qu'actuellement les manuels et les cours sont « axiomatiques ». Le constructivisme d'autre part est resté l'apanage presque exclusif de l'intuitionnisme de BROUWER à Amsterdam.

Il est aujourd'hui facile de comprendre pourquoi le conflit ne pouvait être tranché sur le plan théorique : c'est qu'il n'existe aucune incompatibilité entre une théorie constructive et une théorie axiomatique des ensembles. Toutes deux sont réalisables. De même qu'il y a place en mathématiques

pour l'arithméticien et pour le géomètre, de même il y a place pour une théorie des ensembles et pour une analyse, aussi bien constructives qu'axiomatiques. En revanche, dès qu'on pose la question de savoir s'il est absolument indispensable qu'à côté d'une des formes de la théorie, on élabore aussi l'autre, le conflit surgit inévitablement. Chaque partie émet des prétentions absolues et refuse à l'autre le droit à l'existence. Il est certainement important de savoir si, dans certains plans d'études, il ne faut introduire que des mathématiques constructives ou seulement des mathématiques axiomatiques. Mais il ne s'agit que d'une question purement pratique et les divergences d'opinion ne témoignent d'aucune « crise des fondements » en mathématiques.

En mathématiques axiomatiques, toute thèse est de la forme : « La proposition ... est logiquement dérivable du système d'axiomes ---. » Chacun peut ainsi, fut-il constructiviste, s'assurer de la validité d'une proposition de cette espèce et cela indépendamment de ce qu'il considère la recherche de ces axiomes comme utile ou non. Pas plus de difficultés de l'autre point de vue : ce qui se passe en mathématiques constructives ne saurait faire problème pour l'axiomaticien. S'il veut dépasser le domaine du constructif pour faire plus, il introduit ses axiomes et il est le plus souvent d'avis qu'il est utile, indispensable même, de vouloir plus.

La situation actuelle n'est malheureusement pas encore aussi claire que cette description pourrait le laisser paraître. Les axiomaticiens émettent souvent des prétentions à un monopole qui ne permet pas au conflit de s'apaiser. Elles remontent à FREGE (1879) avec qui la logique entre en scène. Voyons encore le rôle qu'elle joue. Dès le milieu du XIX^e siècle, la logique s'est éveillée de son séculaire sommeil de Belle au Bois Dormant à une vie nouvelle (elle avait connu sa dernière floraison dans la scolastique). FREGE exigea — contrairement à KANT — de réduire l'arithmétique à la logique. Si nous ne prenons plus aujourd'hui ce « logicisme » à la lettre, il n'en reste pas moins que le réductionnisme de FREGE survit dans la théorie des ensembles, où les axiomaticiens traitent les nombres comme des ensembles d'ensembles de même puissance. Lorsqu'on ne veut pas prendre la peine d'élaborer tout un système d'axiomes pour la théorie des ensembles, on se contente de ceux de PEANO. On dispose ainsi d'une arithmétique axiomatique, à côté de laquelle l'arithmétique constructive fait tout au plus figure, aux yeux des axiomaticiens, d'arithmétique préscientifique.

C'est en tirant au clair les relations entre les mathématiques constructives et axiomatiques que la métamathématique de HILBERT se révéla réellement fructueuse. On ne pouvait prévoir que le problème initial de la consistance de l'analyse allait conduire à examiner le rapport entre les deux sortes d'arithmétiques. Il était cependant nécessaire d'élargir le problème, puisqu'on ne

pouvait le formuler rigoureusement sans commencer par tirer ce rapport au clair. Sitôt en effet qu'on eût compris qu'il existait — indépendamment de la méthode axiomatique — une mathématique constructive, le problème de la consistance de l'analyse ne pouvait se poser que d'une seule manière : il fallait prouver qu'une analyse axiomatique (ou plus généralement une théorie axiomatique des ensembles) était consistante en usant des méthodes des mathématiques constructives. Comme il est possible de définir ce que veut dire « déduire logiquement une contradiction » au sein des mathématiques constructives, cette façon de poser le problème a un sens précis. On s'en rendra compte en revenant, une fois encore, à la logique. C'est avant tout à FREGE que l'on doit l'idée que toute déduction logique doit pouvoir s'effectuer de la manière suivante. La classe des formes propositionnelles logiquement vraies $A, B, \dots$ est définie par l'intermédiaire d'un calcul. (Ces formes sont construites à partir de symboles de relations et de variables d'objets et à l'aide des particules logiques.) Cela veut dire qu'une forme propositionnelle est logiquement vraie si et seulement si on peut l'obtenir en un nombre fini de pas, à partir d'un nombre fini de *formules fondamentales* et d'un nombre fini de *règles de calcul*. On passe alors d'une proposition a à une proposition b par une déduction logique si et seulement si a et b résultent par substitution (on substitue aux symboles de relations des signes de relations particulières) de deux formules A et B , telles que la formule $A \rightarrow B$ (« si A , alors B ») est logiquement vraie.

Les formules fondamentales et les règles de calcul dont il est question dans un calcul logique sont tout autre chose que les axiomes d'une théorie axiomatique, dont on déduit les conséquences par les règles logiques. Une confusion est ici facile, mais il faut bien retenir qu'un calcul logique opère avec des suites finies de signes (les formules) et que la classe de ces formules logiquement vraies est définie inductivement. Méthodologiquement, tout ceci est parfaitement identique à ce qui se passe en arithmétique constructive.

Il n'y aurait donc aucune crise des fondements de la logique, si l'on arrivait à se mettre d'accord sur ses idées fondamentales et sur ses règles de calcul. Mais BROUWER (1907), en affirmant l'autonomie des mathématiques constructives par rapport aux mathématiques axiomatiques, rejette en fait la logique « classique » redécouverte et développée au XIX^e siècle. Il met en doute qu'il soit légitime d'admettre, au départ, que toute proposition mathématique est vraie ou fausse. C'est qu'il n'existe aucun procédé qui permette de décider effectivement de la vérité d'une proposition mathématique arbitrairement donnée. (Cette thèse a été précisée depuis par CHURCH (1936) et prouvée. Cf. le chapitre III.) En se limitant au sens effectif qu'on peut donner aux particules logiques (et, ou, si ... alors, pour tous, pour quelque), on obtient

une logique non classique que nous appellerons la *logique effective* et que HEYTING (1930) a été le premier à formaliser. Seule cette logique-là est pertinente aux mathématiques constructives. On pourrait à vrai dire imaginer divers moyens pour interpréter les particules logiques de façon à justifier l'usage de la logique classique. C'est pourquoi les axiomaticiens qui refusent aux mathématiques constructives le droit à l'existence, prétendent en même temps que le salut ne se trouve que dans la logique classique.

C'est ainsi que l'examen du rapport entre l'arithmétique constructive et l'arithmétique axiomatique revient essentiellement à tirer au clair la relation entre logique effective et logique classique. L'arithmétique elle-même n'est que le prototype d'une théorie constructive. L'étroite liaison entre l'axiomatique et la logique classique est encore renforcée aujourd'hui par le lien fondamental suivant. GÖDEL (1936) a établi que les formules logiquement vraies sont tout justement celles qui deviennent des propositions vraies à travers n'importe quelle substitution (de signes de relations particulières aux symboles de relations). Il est ainsi possible de définir la vérité logique d'une formule à l'intérieur d'une théorie (axiomatique) des ensembles. C'est là la définition sémantique de la vérité logique de TARSKI (1933). Elle se révèle de la plus grande utilité pour l'étude des théories axiomatiques, dans la mesure tout au moins où l'on décide de poser les problèmes dans le cadre d'une théorie (axiomatique) des ensembles. Cependant l'étude constructive des théories axiomatiques a déjà tiré un utile parti des considérations sémantiques. C'est que souvent la théorie des ensembles ne joue qu'un rôle très secondaire, ce qui permet de la laisser entièrement de côté. Il suffit donc de retenir que la recherche axiomatique utilise la logique classique, tandis que la recherche constructive doit encore tendre à interpréter les résultats de façon effective.

Ainsi se termine le chemin qui conduit au point où la métamathématique peut prendre sa source. Ce fut un chemin difficile — en apparence tout au moins — à travers tous les écueils qui ont provoqués la crise des fondements des mathématiques. Il reste encore quelques obstacles qui ne doivent cependant pas nous arrêter, tel par exemple le rapport entre logique et langue naturelle. La métamathématique peut se définir maintenant, d'une façon générale, comme la théorie mathématique qui a pour objet les théories axiomatiques. Le mot « métamathématique » ne désigne plus ainsi — comme chez HILBERT — la « théorie des mathématiques (axiomatiques) », mais la « mathématique des métathéories ». Une métathéorie est alors une théorie (constructive ou axiomatique) qui porte sur des théories axiomatiques. Il est bien entendu que la métamathématique de HILBERT est encore comprise dans cette généralisation, sitôt qu'on ne réduit pas les métathéories aux métathéories axiomatiques, comme dans la sémantique de TARSKI, mais

qu'on accepte aussi de prendre en considération les métathéories constructives.

La langue que nous utiliserons dans ce livre, pour conduire la recherche et formuler les résultats, sera toujours celle des mathématiques constructives. Pour autant donc que les particules logiques de la langue naturelle y seront utilisées, elles auront leur sens effectif. Cela ne signifie d'ailleurs pas que nous allons nous limiter à la mathématique constructive. Toute recherche axiomatique (et il s'agit ici d'une recherche sur les métathéories axiomatiques) peut en effet parfaitement se formuler dans cette langue. Ce sont en fait des propositions dans une métamétathéorie constructive. Nous traiterons toutefois comme métamathématique toutes les itérations de « méta ». Utiliser dans une recherche la logique classique (et non la logique effective) revient simplement à appliquer certaines règles — que l'on peut décrire de façon constructive — aux propositions, traitées comme des suites de signes. Les résultats peuvent ainsi se formuler tout aussi bien dans la langue des mathématiques constructives.

Le chapitre I contient une introduction à la logique classique et effective. Il traite, en particulier, du problème de l'interprétation des particules logiques. La complétude de la logique effective y est prouvée de façon constructive à l'aide d'une interprétation « opératoire » imaginée par l'auteur. Celle-ci se distingue d'autres méthodes antérieures par l'usage qu'elle fait de dialogues.

Le chapitre II fournit la formalisation de l'arithmétique classique d'après PEANO, la semiformalisation complète (c'est-à-dire avec l'induction infinie) de l'arithmétique classique et une preuve constructive de consistance qui introduit l'induction infinie dans le *Hauptsatz* de GENTZEN.

Le chapitre III commence par définir l'énumérabilité (récursive) comme une manière de préciser la notion de « formalisme ». Cela permet de définir aussi les classes (récursivement) décidables de formules. Après la preuve que toute classe de nombres décidable est fidèlement représentable dans l'arithmétique de PEANO (et même dans celle de ROBINSON), les théorèmes d'indécidabilité de l'arithmétique sont immédiats et partant le théorème d'incomplétude de GÖDEL. On trouvera encore, en complément, le théorème de GÖDEL sur la non-dérivabilité de la consistance formalisée.

Le chapitre IV commence par établir des théorèmes d'indécidabilité pour certaines théories axiomatiques. Pour cela on utilise le chapitre III et la consistance de l'arithmétique qui a été démontrée au chapitre II. En revanche, la preuve des théorèmes de TARSKI, relatifs à la décidabilité des corps algébriques fermés et des corps réels fermés, est logiquement indépendante des chapitres II et III.

Il se trouve ainsi que le problème dont HILBERT est parti, celui de la consis-

tance de l'analyse, n'est pas traité. Il est question dans cet ouvrage de systèmes particuliers de la théorie des ensembles, dont l'étude requiert des méthodes particulières. Le problème de HILBERT n'appartient plus aujourd'hui à la métamathématique générale, mais à la métathéorie des ensembles et il présuppose la connaissance de la théorie naïve et axiomatique des ensembles. Il déborde par là le cadre de ce livre, mais le lecteur pourra se reporter à l'ouvrage de K. SCHÜTTE : *Beweistheorie* 1960, qui contient tout ce qu'on en savait au moment de sa parution.

CHAPITRE PREMIER

FORMALISATION DE LA LOGIQUE

Nous avons montré dans l'Introduction que l'existence de la métamathématique était liée à une formalisation de la logique, aussi est-ce par là que nous allons commencer. Nous étudierons en outre certains problèmes relatifs à la logique formalisée, problèmes qui sont du domaine de la métalogue, c'est-à-dire de la théorie qui prend la logique même pour objet.

Nous ne traiterons que sommairement de la logique classique dont on peut facilement trouver des exposés détaillés : HILBERT-ACKERMANN 1959, LORENZEN 1958 par exemple¹.

§ 1. La logique classique des joncteurs

Nous nous limiterons dans ce paragraphe aux propositions *v-définies*², c'est-à-dire aux propositions pour lesquelles il est possible de décider effectivement si elles sont vraies ou fausses. Il n'est pas indispensable d'ouvrir un débat sur ce qu'est une « proposition » ou sur ce qu'est la « vérité ». Poser une proposition *v-définie*, l'énoncer au cours d'un dialogue, c'est en tous cas faire un acte qui s'accompagne d'un procédé permettant de décider s'il est légitime ou non. Nous pourrions donc introduire comme proposition *v-définie* tout schème d'action pour lequel on aura fixé une procédure qui, appliquée conformément au schème, fournira exactement une des deux « valeurs ». Celles-ci sont appelées *valeurs de vérité* et sont représentées par les mots « vrai » et « faux » ou par les symboles $\vee$ et $\wedge$. Plus brièvement, nous dirons que la proposition a la valeur que fournit le procédé de décision.

Nous utiliserons les lettres $a, b, c, \dots$ comme variables (sémantiques) de propositions.

Si a est une proposition, alors $\neg a$ (*non a*) est une proposition qui a la valeur opposée, c'est-à-dire que $\neg a$ a la valeur $\vee$ (respectivement $\wedge$) lorsque a a la valeur $\wedge$ (respectivement $\vee$). Ceci détermine un procédé de décision pour les nouvelles propositions construites avec $\neg$.

A partir de deux propositions a et b , on engendre en les liant par $\wedge$ (*et*) et

1. Signalons en français : A. TARSKI, *Introduction à la logique*, Paris, Gauthier-Villars, 1960. J. DOPF, *Notions de logique formelle*, Louvain et Paris, Nauwelaerts et Gauthier-Villars, 1965.

2. L'allemand dit *wahrheitsdefinit*, littéralement « défini au sens de la vérité ». Pour alléger le texte, j'ai introduit le barbarisme commode « *v-défini* ».

par $\vee$ (*vel*) de nouvelles propositions $a \wedge b$ et $a \vee b$, propositions pour lesquelles les *tables de vérité* suivantes fournissent un procédé de décision :

		b	
$\wedge$		$\vee$	$\wedge$
a	$\vee$	$\vee$	$\wedge$
	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$

		b	
$\vee$		$\vee$	$\wedge$
a	$\vee$	$\vee$	$\vee$
	$\wedge$	$\vee$	$\wedge$

Les trois signes fonctionnels $\wedge$, $\vee$, $\neg$ sont des signes de connexion logique entre propositions ou, plus brièvement, des *joncteurs*. Les fonctions correspondantes (négation $\neg$, conjonction $\wedge$, adjonction $\vee$ ³) ont pour arguments et pour valeurs des propositions *v*-définies. La valeur de vérité de la fonction ne dépend donc que des valeurs de vérité des arguments. Ainsi, ces fonctions propositionnelles fournissent par abstraction des *fonctions de vérité*, dont les arguments et les valeurs sont des valeurs de vérité.

Tandis qu'une *proposition atomique*, c'est-à-dire une proposition qui n'est pas composée à l'aide de joncteurs (et c'est de telles propositions que nous sommes partis) ne peut être que vraie ou fausse, les propositions composées présentent un nouveau phénomène : elles peuvent être « logiquement vraies », c'est-à-dire vraies sur la base de la seule logique. Pour définir cette vérité logique, il nous faut tout d'abord préciser la notion de « forme » d'une proposition. Soit a_1, b_1, c_1 et a_2, b_2, c_2 deux triples de propositions atomiques distinctes. Les deux propositions $(a_1 \wedge b_1) \vee \neg c_1$ et $(b_2 \wedge c_2) \vee \neg a_2$ par exemple, ont la même forme. Elles sont composées de propositions atomiques, à l'aide des mêmes joncteurs et dans le même ordre. Pour pouvoir traiter les formes propositionnelles comme des objets en soi, nous ferons usage de nouveaux signes, les symboles de proposition $a, b, c, \dots$. La forme générale des propositions ci-dessus sera donc $(a \wedge b) \vee \neg c$.

Les *formes propositionnelles* sont des suites de signes constituées par des symboles de propositions (dits le plus souvent « variables de propositions ») et par des joncteurs. On les appelle aussi *formules* et, plus exactement, « formules composées de joncteurs logiques ». Pour les formules, nous utiliserons les variables (syntaxiques) $A, B, \dots$. A la place des parenthèses habituelles $(,)$, qui déterminent l'ordre d'application des fonctions de vérité, nous ferons usage d'une ponctuation un peu plus commode. Au lieu de $(a \wedge b) \vee \neg c$, nous écrirons $a \wedge b \vee \neg c$; au lieu de $((a_1 \wedge b_1) \vee (a_2 \wedge b_2)) \wedge c$,

3. Le terme *Adjunktion* est un néologisme introduit par l'auteur pour remplacer celui de *Disjunktion*. « Disjonction » fait penser à une proposition qui ne serait vraie que si un seul des deux termes était vrai. J'ai donc aussi introduit en français l'expression « adjonction » et l'adjectif « adjonctif ».

nous écrirons $a_1 \wedge b_1 \vee a_2 \wedge b_2 \wedge c$; etc. Pour indiquer qu'un joncteur $\wedge$ ou $\vee$ « vient après », nous le surmonterons toujours d'un point supplémentaire. En revanche, si un signe $\neg$ se trouve devant une paire de parenthèses, comme c'est par exemple deux fois le cas dans $\neg(\neg(a \wedge b) \wedge c)$, chaque parenthèse sera simplement remplacée par un point au niveau de la ligne : $\neg. \neg. a \wedge b. \wedge c.$

Une forme propositionnelle sera dite *logiquement vraie*, si toutes les propositions de cette forme sont vraies. Dans ce cas, nous dirons aussi que les propositions elles-mêmes sont logiquement vraies. Par exemple, la forme $a \wedge b \vee \neg a \vee \neg b$ est logiquement vraie. Pour s'en convaincre, il suffit de substituer à a et à b les quatre combinaisons différentes possibles des valeurs de vérité $\vee$ et $\wedge$. Les tables de vérités donnent $\vee$ dans tous les cas.

Une substitution de valeurs de vérité à la place de tous les symboles de proposition dans une formule s'appelle une *interprétation*. Si, dans une interprétation, une formule A prend la valeur $\vee$, cette interprétation est dite un *modèle* de A . Pour utiliser une terminologie encore un peu compliquée pour ce que nous en faisons maintenant, nous dirons que les formules logiquement vraies sont celles pour lesquelles toute interprétation est un modèle.

Parallèlement à la vérité logique, on peut maintenant définir aussi ce qu'est une déduction logique (pour la logique des joncteurs). Soit A et B deux formules telles que tout modèle de A est aussi modèle de B . Nous dirons alors que la formule A *implique logiquement* la formule B (pour la logique des joncteurs). Une déduction d'une proposition b à partir d'une proposition a , c'est-à-dire simplement le passage de a à b , est une *déduction logique*, s'il existe des formules A et B telles que (1) A implique logiquement B et (2) a résulte de A et b de B par la même substitution.

Pour autant donc qu'il s'agisse de propositions *v-définies* — et seulement des joncteurs — le concept fondamental de la logique, celui de conséquence logique, est bien clair. Cette partie de la logique porte le nom de logique classique des joncteurs. Comme on le voit, la logique dépend seulement des formes propositionnelles et nullement des propositions elles-mêmes. Là est la raison de l'expression « logique formelle ».

Si une formule A implique une formule B , nous écrirons $A < B$. Si on a encore réciproquement $B < A$ (que l'on pourrait écrire $A > B$), on dit que A et B sont *équivalentes* (pour la logique des joncteurs). Nous écrirons alors $A \asymp B$.

L'implication, qui est une relation entre formules ($<$ et $\asymp$ ne sont pas des joncteurs) peut se ramener à la vérité logique. En effet, si tout modèle de A est un modèle de B , il est évident que toute interprétation est un modèle

de $\neg A \vee B$ et inversement. Introduisons alors un nouveau joncteur $\rightarrow$, tel que $A \rightarrow B$ soit une abréviation pour $\neg A \vee B$. Dans ces conditions A implique B si et seulement si la formule $A \rightarrow B$ est logiquement vraie. La fonction propositionnelle relative à $\rightarrow$ est souvent appelée *implication* et, plus précisément, « implication matérielle ». Toutefois, pour la distinguer de la relation d'implication définie plus haut, nous l'appellerons dans ce qui suit *conditionnelle*⁴.

Inversement, si on prend l'implication logique comme concept de départ, on peut y ramener la vérité logique. Considérons, en effet, une formule quelconque logiquement vraie, par exemple $a \vee \neg a$. Puisque cette formule a la valeur $\vee$ pour toute interprétation, désignons-la elle-même par $\vee$. (Au lieu de $\neg \vee$ nous écrirons de façon analogue $\wedge$.) Avec cette convention, une formule A est logiquement vraie si et seulement si $\vee$ implique logiquement A , si donc on a $\vee < A$.

§ 2. Logique effective des joncteurs et des quantificateurs

La logique des joncteurs exposée au § 1, résultait de ce que les propositions considérées étaient *v*-définies. Le problème de leur valeur de vérité devait toujours être (effectivement) décidable. Mais toutes les propositions correctement formulées de la langue naturelle sont-elles *v*-définies ? Évidemment non. Pour trouver des contre-exemples, il n'est pas nécessaire de chercher des propositions dont on peut se demander si elles ont véritablement un sens, comme par exemple « maintenant je mens » ou « la structure de l'espace réel est euclidienne ». Il y a déjà bien suffisamment d'exemples parmi les propositions dont personne ne peut douter sérieusement qu'elles sont significatives.

Considérons l'affirmation suivante sur les nombres parfaits : « Il y a des nombres impairs qui sont parfaits ». (« Parfait » qualifie un nombre qui est égal à la somme de ses diviseurs propres. Ainsi $6 = 1 + 2 + 3$ et $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ sont parfaits).

On voit bien comment il faudrait prouver la vérité de cette proposition. Il « suffirait » de trouver un nombre impair n tel que le calcul de la somme de ses diviseurs propres donne précisément n (et une telle somme peut se calculer effectivement). Toutefois, jusqu'à maintenant, personne ne connaît un tel nombre, et personne ne sait non plus si un jour quelqu'un en trouvera un. De plus, on ne voit pas du tout à quel procédé général on pourrait faire

4. L'auteur utilise ici le terme, aujourd'hui rare, de *Subjunktion*. J'ai suivi la suggestion de V. W. Quine et appelant « conditionnelle » cette fonction propositionnelle.

appel pour prouver la proposition « aucun nombre impair n'est parfait ». Nous ne disposons ainsi d'aucun procédé pour décider de la vérité de la proposition : « il y a des nombres impairs qui sont parfaits ». Quel sens y a-t-il alors à dire néanmoins que cette proposition est soit vraie, soit fausse, qu'« en soi » elle est vraie ou fausse ? On pourra valablement répliquer : pourquoi ne pourrait-on pas *admettre* que la proposition est soit vraie soit fausse, même si on ne sait pas (encore) effectivement ce qu'il en est ? A quoi on répondra par une nouvelle question : Admettre que toute proposition est soit vraie soit fausse — sans vouloir dire par là que cette disjonction est effectivement décidable — ne revient-il pas à dire seulement que :

- (1) aucune proposition n'est à la fois vraie et fausse
- et (2) aucune proposition n'est à la fois non vraie et non fausse ?

Comme la fausseté d'une proposition a revient à la vérité de $\neg a$, ces deux principes peuvent être symbolisés comme suit :

- (1) $\neg (a \wedge \neg a)$
- (2) $\neg (\neg a \wedge \neg \neg a)$

En logique classique des joncteurs (1) et (2) sont équivalents à $a \vee \neg a$.

S'en suit-il alors, par exemple, que la proposition « Il y a des nombres impairs qui sont parfaits ou aucun nombre impair n'est parfait » est logiquement vraie ? Il est pour le moins douteux que la logique classique des joncteurs soit ici applicable ou qu'elle soit « onbetrouwbaar » pour utiliser l'expression par laquelle BROUWER caractérise la situation. Il en est tout autrement d'une proposition comme « il y a des planètes qui n'ont pas de satellite ». Dans ce cas, on part du fait qu'on pourrait s'assurer de l'existence d'un satellite. Il n'y a de plus qu'un nombre fini de planètes. L'examen de tous les cas individuels fournit donc « en principe » le procédé de décision. Mais « en principe » aussi, on ne peut examiner la perfection de tous les nombres impairs, puisqu'il en existe une infinité. Il est donc tout simplement faux de prétendre pouvoir traiter l'infini comme le fini. Le problème qui s'est posé à la logique classique ensuite de la critique de BROUWER, consiste à rechercher dans quelle mesure la logique doit être modifiée pour s'appliquer aux classes infinies.

Comme les joncteurs de la logique classique sont définis par des fonctions de vérité, ils devront être redéfinis si on laisse tomber l'hypothèse classique selon laquelle on a affaire à des propositions v -définies. Dans le cas qui nous occupe « il y a des nombres impairs qui sont parfaits », la proposition n'est pas v -définie et nous avons vu comment on peut décider s'il en existe une preuve. Il faut fournir un nombre impair n et le calcul de la somme des

diviseurs propres de n doit redonner n . On a donc là un procédé qui permet de décider, non de la vérité d'une proposition, mais du statut de « preuve » d'une certaine procédure (procédure qui consiste normalement à écrire des propositions). Toute proposition, accompagnée d'un tel procédé de décision, pourra être appelée *p-définie*⁵. Il n'est pas plus nécessaire de définir ici le concept de preuve qu'il n'était nécessaire de définir celui de vérité à propos des propositions *v-définies*. Il suffit, dans les deux cas, que soit donné un procédé quelconque de décision.

Nous allons, dans ce qui suit, introduire une logique « effective » où la vérité logique des propositions sera définie sous l'hypothèse qu'elles sont construites à partir de propositions *p-définies*. En général, les propositions composées ne seront plus *p-définies*. Elles seront néanmoins toutes « définies » en un sens plus large que nous allons introduire.

Les compositions de propositions *p-définies* avec $\wedge$ et $\vee$ sont certainement encore *p-définies*, si on pose ce qui suit. On aura une preuve de $a \wedge b$ en fournissant une preuve de a et une preuve de b . Nous supposons que le lecteur comprend ce que veut dire faire une chose et encore une chose, l'une après l'autre. Si tel n'était pas le cas, il lui faudra suivre un enseignement pratique pour l'apprendre! Il s'agit de quelque chose qu'on ne peut pas plus apprendre dans un livre, qu'on ne peut, par exemple, apprendre à lire dans un manuel, si on ne sait pas encore lire.

Pour $\vee$, nous poserons qu'on aura une preuve de $a \vee b$, en fournissant une preuve de a ou une preuve de b , donc de l'une des deux propositions à choix.

La définition que nous venons de donner de la preuve d'une adjonction s'étend sans peine de deux propositions à plusieurs et même à une infinité. Soit $a(x)$ une forme propositionnelle arithmétique qui ne contient qu'une seule variable x pour les nombres dits naturels 0, 1, 2, ..., par exemple « x est parfait ». Soit encore la proposition $a(n)$, *p-définie* pour tout nombre naturel n . A partir de telles formes propositionnelles, on construira de nouvelles propositions $\bigvee_x a(x)$ (« pour quelque x : $a(x)$ ») et nous poserons ce qui suit : On aura une preuve de $\bigvee_x a(x)$ en fournissant un nombre naturel n et une preuve de $a(n)$.

Il s'ensuit que $\bigvee_x a(x)$ est une *adjonction infinie*, que l'on pourrait tout aussi bien écrire $a(0) \vee a(1) \vee a(2) \vee \dots \vee a(n) \dots$ (à condition de ne rien changer à ce qu'il faut entendre par une preuve). Mais il est clair que $\bigvee_x a(x)$ est une notation plus commode. De même, en mathématiques, on écrit plus volontiers $\sum_x f(x)$ au lieu de $f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(n) + \dots$.

5. L'allemand dit *beweisdefinit*, littéralement « défini au sens d'une preuve ». J'ai introduit « *p-défini* » par analogie avec « *v-défini* ».

On ne peut évidemment pas introduire d'une façon analogue une *conjonction infinie* sous forme d'une proposition *p-définie*. Il n'est pas possible d'exiger de celui qui affirme « pour tout x : $a(x)$ » (en symboles : $\bigwedge_x a(x)$, où $a(x)$ est de nouveau une forme propositionnelle arithmétique telle que toutes les propositions $a(n)$ soient *p-définies*) qu'il s'oblige à fournir encore une « preuve » de son affirmation. Ce qu'il dit a un sens dès qu'il s'engage à fournir une preuve de $a(n)$, pour tout n qu'on lui propose. Le champ des éventualités, pour lequel il faut s'assurer qu'on pourra toujours faire face à l'obligation qu'on assume en soutenant $\bigwedge_x a(x)$, n'est encore nullement limité. Il est d'ailleurs inutile d'entrer dans la problématique d'une telle limitation, sitôt qu'on renonce à faire des universelles comme $\bigwedge_x a(x)$ des propositions *p-définies*. En vertu de ce qui précède, les propositions universelles sont définies en un sens plus large, à savoir au sens du dialogue (propositions *d-définies*⁶).

Imaginons deux personnes, dont la première affirme $\bigwedge_x a(x)$. La seconde est alors en droit de choisir à volonté un nombre naturel n . Si la première personne peut fournir la preuve qui correspond à $a(n)$, elle a gagné. Sinon elle a perdu. L'issue du dialogue est ainsi toujours déterminée et c'est pourquoi on peut considérer les propositions universelles comme *d-définies*. D'une façon générale, une proposition sera dite *d-définie* si, pour la soutenir dans un dialogue, les règles des deux partenaires sont déterminées de telle sorte qu'on peut décider à chaque instant (1) si le dialogue est terminé et (2) qui, dans ce cas, a gagné. « Je passe » n'est pas autorisé.

Partons de propositions *p-définies*. Toutes les compositions qu'on peut former à l'aide d'un nombre fini ou non de conjonctions et d'adjonctions sont, comme il résulte de ce qui précède, *d-définies*. On reste encore dans le même champ de propositions en introduisant une négation $\neg$ de la façon suivante. Si le premier des deux partenaires affirme $\neg a$ à partir d'une proposition *d-définie* a , le second a le droit (1) d'accepter l'affirmation (il dit quelque chose comme « non dubito », en symbole « ? ») et le premier a gagné ou (2) d'affirmer a de son côté. Alors, selon que le second gagne ou perd ce dialogue commencé par a , le premier a perdu ou a gagné. Ainsi $\neg a$ ne peut être gagné que si le partenaire a pu être contraint à perdre a . En conséquence, il serait préférable de traduire $\neg a$ par « a est réfutable » plutôt que par « non- a ».

Essayons de jouer $\neg a \wedge \neg a$ selon ces règles. Celui qui commence le dialogue par une affirmation — nommons-le le *proposant* P — pourra toujours, dans le cas de $\neg a \wedge \neg a$, gagner contre son adversaire, l'*opposant* O .

6. L'allemand dit *dialogisch-definit*, littéralement « défini au sens du dialogue », ce que j'ai traduit par « *d-défini* ».

	O		P	
(1)			$\neg. a \wedge \neg a.$	
(2)	$?$	$a \wedge \neg a$		$? 1$
(3)		a		$? 2$
(4)		$\neg a$		a

Ce tableau représente la stratégie de gain pour P . La division des colonnes, à partir de la ligne (2), est due au fait que O peut choisir entre $?$ et $a \wedge \neg a$. A la souscolonne de droite, P déclare « ? 1 » (*dubito* : 1) et O doit répondre par le premier terme a de la conjonction. P met ensuite en cause le second terme et peut, à son tour, répondre a à la riposte $\neg a$ de O . Si maintenant O réclamait une preuve de a , P pourrait d'abord l'exiger de O , puisque celui-ci a déjà affirmé a plus haut. P dispose donc toujours d'une stratégie de gain, s'il a soin de n'affirmer que des propositions qui ont été préalablement soutenues par O .

Pour la proposition, logiquement vraie en logique classique, $a \vee \neg a$, le tableau a l'allure suivante :

	O		P	
(1)			$a \vee \neg a$	
(2)		$?$	a	$\neg a$
(3)	$?$	a		

Ici, à la ligne (2), P a le choix entre a et $\neg a$. S'il choisit a et ne peut en apporter la preuve, il perdra. En revanche s'il choisit $\neg a$, il perdra si O peut prouver la thèse a . Donc P ne peut gagner $a \vee \neg a$ que s'il sait soit (1) comment prouver a , soit (2) que l'opposant ne peut pas prouver a . En conséquence P ne peut pas, en général, gagner cette thèse. Car, si P sait seulement, par exemple, que son opposant connaît deux nombres amis (c'est-à-dire deux nombres dont chacun est la somme des diviseurs propres de l'autre), cela ne lui donnera pas pour autant le moyen de trouver, lui aussi, deux nombres amis. Et il ne pourrait que par hasard tomber tout justement sur 220 et 284. On voit apparaître ici une différence entre les deux formes propositionnelles $\neg. a \wedge \neg a$ et $a \vee \neg a$, qui sont toutes deux logiquement vraies au sens classique des joncteurs (c'est-à-dire par rapport aux propositions v -définies). On peut toujours, dans un dialogue, gagner les propositions de la forme $\neg. a \wedge \neg a$, mais pas les propositions de la forme $a \vee \neg a$. Dans le second cas il faut en effet se décider effectivement entre a et $\neg a$ et on ne peut le faire que sur la base du contenu de a et non sur celle de sa seule forme.

Nous sommes ainsi conduits à une nouvelle notion de vérité logique, plus forte que celle de la logique classique utilisée jusqu'ici. Il s'agit de la vérité logique effective d'une forme propositionnelle. Nous dirons qu'une forme propositionnelle est *logiquement vraie de façon effective*⁷ si et seulement s'il est possible de gagner dans un dialogue toute proposition de cette forme (contre tout opposant). Cette définition ne suffit pas à caractériser la vérité effective de manière satisfaisante. Nous avons dû en effet nous référer à toutes les propositions — et à tous les opposants alors que, dans la mesure où la logique formelle est l'étude des formes propositionnelles, chacun des concepts utilisés ne peut être défini qu'en termes des formes.

Avant de donner cependant une définition satisfaisante, nous allons étendre encore le champ des formes propositionnelles à la conditionnelle (effective). En logique classique $a \rightarrow b$ n'était introduite que comme une abréviation pour la proposition $\neg a \vee b$. Mais si a et b sont d -définies, l'usage dans un dialogue de $a \rightarrow b$ peut se faire de la façon suivante, en accord satisfaisant avec la signification courante de l'expression « si a , alors b ». Si le premier partenaire affirme $a \rightarrow b$, le second a le choix entre ? et a . Dans le cas ?, le premier partenaire a gagné. Dans le cas a , il doit affirmer b , pour le cas où le second peut justifier son affirmation a . Le gain et la perte suivent l'issue du dialogue avec a et b . Cette procédure diffère de celle utilisée pour $\neg a \vee b$. Ainsi par exemple $a \rightarrow a$ peut toujours se gagner, au contraire de $\neg a \vee a$. Si P en effet affirme une proposition $a \rightarrow a$, il ne s'engage qu'à soutenir a si O l'a soutenu auparavant. Il s'ensuit que la conditionnelle effective $a \rightarrow b$ n'est nullement une abréviation pour $\neg a \vee b$.

Examinons deux exemples de dialogues systématiquement conduits et de leurs stratégies de gain.

	O	P
(1)		$\neg \neg \wedge_x a(x) \rightarrow \wedge_x \neg \neg a(x)$
(2)	$\neg \neg \wedge_x a(x)$	$\wedge_x \neg \neg a(x)$
(3)	? n	$\neg \neg a(n)$
(4)	$\neg a(n)$	$\neg \wedge_x a(x)$
(5)	$\wedge_x a(x)$	? n
(6)	$a(n)$	$a(n)$

A la ligne (2), O suivant la règle pour $\rightarrow$, répond par l'antécédent et P par le conséquent. A la ligne (3), O demande une justification de $P(2)$ et P

7. Il sera éventuellement commode de dire aussi « effectivement l -vrai », où « l -vrai » traduit l'allemand *logisch-wahr*.

répond en conséquence. A la ligne (4), O retient l'affirmation $P(3)$ et P riposte en attaquant $O(2)$. Là-dessus O attaque $P(4)$, P réclame une justification de $O(5)$, O répond en conséquence et P peut alors attaquer $O(4)$ et gagner. Cet exemple montre clairement la façon dont les règles données jusqu'ici doivent être appliquées dans un dialogue. A chaque ligne, P n'a qu'à justifier la dernière affirmation qu'il a posée, tandis que O doit pouvoir défendre toutes les affirmations qu'il a posées jusque là. Cette dissymétrie est rendue nécessaire par le fait que — si nous ne retenons que la forme des propositions — O est à même de poser sans preuve n'importe quelle proposition atomique.

Un exemple de thèse que P ne peut pas gagner en se basant uniquement sur la forme est le suivant:

	O		P	
(1)			$\bigwedge_x \neg \neg a(x) \rightarrow \neg \neg \bigwedge_x a(x)$	
(2)	$\bigwedge_x \neg \neg a(x)$		$? n$	$\neg \neg \bigwedge_x a(x)$
(3)	$\neg \neg a(n)$	$\neg \bigwedge_x a(x)$	$\neg a(n)$	$\bigwedge_x a(x)$
(4)	$a(n)$	$? m$	$?$	$a(m)$
(5)		$?$		

A la ligne (2), P peut choisir. Ou, dans la sous-colonne de gauche, il demande justification de $O(2)$, ou il répond par le conséquent. A la ligne (3.1), O répond comme il le doit, P attaque (3.1) et perd si O peut répondre à la ligne (4) par $a(n)$. A la ligne (3.2), O attaque l'affirmation $P(2.2)$. P doit riposter par une attaque de $O(3.2)$ et il perd s'il ne peut prouver $a(m)$ pour le m choisi par O . P ne serait certain de gagner que s'il connaissait un n tel que O ne puisse prouver $a(n)$, ou qu'il puisse lui-même prouver $a(m)$ pour tout m . Mais il s'agit-là d'une connaissance que P ne peut acquérir qu'en s'appuyant sur le contenu de $a(x)$ et il ne peut établir sa thèse sur la base de la forme seulement.

Introduisons enfin une dernière possibilité en posant les règles suivantes pour $\forall$ et $\wedge$:

On ne peut mettre $\forall$ en doute.

Celui qui affirme $\wedge$ a perdu.

Dès lors la négation $\neg a$ peut être remplacée par la conditionnelle $a \rightarrow \wedge$, en ce sens que, selon nos conventions, les deux propositions ont même portée dans un dialogue. Nous maintiendrons toutefois la négation comme joncteur autonome.

Le champ des formules (des formes propositionnelles) à considérer en logique effective comporte donc :

(1) Formules atomiques :

$\vee, \wedge$
 $a^0, b^0, \dots$
 $a^1x, b^1x, \dots$
 $a^2xy, b^2xy, \dots$
 $a^3xyz, \dots$
 $\dots$

(Il s'agit de symboles de propositions et de formes propositionnelles avec une ou plusieurs variables d'objets).

(2) Quelles que soient les formules A et B , les formules

$$A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B.$$

(3) Quelle que soit la formule A , la formule $\neg A$.

(4) Quelles que soient la formule A et la variable d'objet x , les formules $\wedge_x A$ et $\vee_x A$.

On n'utilisera dans le dialogue que celles de ces formules qui sont *fermées*, c'est-à-dire celles où ne figure aucune variable d'objet libre. Cela revient à dire que toute variable d'objet qu'on peut rencontrer se trouve dans le domaine d'action d'un quantificateur $\wedge_x$ ou $\vee_x$. Les formules fermées s'appellent aussi des *propositions*. Il faut cependant prendre garde de ne pas confondre ces « propositions » avec celles qui précèdent et que nous avons désignées par les variables $a, b, \dots$. A partir de la formule non fermée $A(x_1, \dots, x_r) \rightarrow x_1, \dots, x_r$ sont toutes les variables libres qui y figurent — on obtient de nouvelles formules fermées en substituant des *constantes* aux variables. Pour disposer d'un nombre suffisant de constantes et ne pas y revenir, nous prendrons une fois pour toutes comme constantes les nombres $1, 2, 3, \dots$ (sans le zéro). Si alors $A(x_1, \dots, x_r)$ par exemple est une formule dans laquelle $x_1, \dots, x_r$ sont les seules variables libres, $A(1, 2, \dots, r)$ est une formule fermée.

Il nous faut maintenant préciser l'usage des formes propositionnelles dans le dialogue, de telle façon qu'il corresponde à celui des propositions quelconques de cette forme. Il suffira de le faire pour les formules fermées atomiques, c'est-à-dire pour les propositions atomiques :

$a^0, b^0, \dots$
 $a^11, b^12, \dots$
 $a^212, b^223, \dots$
 $a^3123, \dots$
 $\dots$

Comme la vérité logique d'une forme propositionnelle doit garantir la possibilité de soutenir victorieusement (contre tout opposant) toute proposition de cette forme, les choses doivent se présenter comme suit :

- (1) Si l'opposant O affirme une proposition atomique fermée, le propositant P n'a pas le droit de la mettre en doute. (Il se pourrait dans certain cas, en effet, que O puisse la prouver).
- (2) Le propositant P ne peut affirmer que des propositions atomiques fermées que O a préalablement posées et O n'ose pas alors les mettre en doute. (Il pourrait arriver en effet que P ne connaisse de preuve pour aucune autre formule atomique).

Nous allons donner maintenant un tableau d'ensemble des stratégies de gain possibles. Pour cela, il faut distinguer deux cas pour chacune des six particules logiques ($\wedge, \vee, \wedge_x, \vee_x, \rightarrow, \neg$) selon que c'est P ou O qui a utilisé l'une d'elle pour une composition.

P a affirmé $A \wedge B$:

$$(P \wedge) \quad \begin{array}{c} \vdots \\ A \wedge B \end{array}$$

O a alors deux possibilités. Il peut exiger que P soutienne le premier ou le second terme de la conjonction. Le tableau se partage donc en deux :

$$\begin{array}{c} \vdots \\ ?1 \quad | \quad ?2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ A \wedge B \\ A \quad | \quad B \end{array}$$

Si P connaît une stratégie de gain pour chacun des sous-tableaux, il peut alors gagner le dialogue entier.

Supposons maintenant que O ait affirmé au cours du dialogue (éventuellement juste avant la dernière ligne) une formule $A \wedge B$:

$$(O \wedge) \quad \begin{array}{c} \vdots \\ A \wedge B \\ \vdots \end{array}$$

P a maintenant deux possibilité, à savoir :

$$\begin{array}{c} \vdots \\ A \wedge B \\ \vdots \\ A \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ A \wedge B \\ \vdots \\ B \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ A \wedge B \\ \vdots \\ A \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ A \wedge B \\ \vdots \\ B \end{array}$$

? 1 et ? 2

Si P connaît une stratégie de gain pour l'un de ces deux tableaux, il peut alors gagner le dialogue entier.

Pour les autres particules logiques, les stratégies de gain possibles sont à traiter de façon semblable. Nous nous bornerons à en écrire le tableau avec le cas échéant les sous-tableaux.

$(P_{\vee})$	$\begin{array}{c} \vdots \\ ? \end{array} \parallel \begin{array}{c} \vdots \\ A \vee B \\ A \end{array}$	$\begin{array}{c} \vdots \\ ? \end{array} \parallel \begin{array}{c} \vdots \\ A \vee B \\ B \end{array}$	
$(O_{\vee})$	$\begin{array}{c} \vdots \\ A \vee B \\ \vdots \\ A \mid B \end{array} \parallel$	$\begin{array}{c} ? \\ \end{array}$	
$(P_{\wedge})$	$\begin{array}{c} \vdots \\ ? n \end{array} \parallel$	$\begin{array}{c} \vdots \\ \wedge_x A(x) \\ A(n) \end{array}$	$(O \text{ choisit le } n)$
$(O_{\wedge})$	$\begin{array}{c} \vdots \\ \wedge_x A(x) \\ \vdots \\ A(n) \end{array} \parallel$	$\begin{array}{c} ? n \end{array}$	$(P \text{ choisit le } n)$
$(P_{\vee})$	$\begin{array}{c} \vdots \\ ? \end{array} \parallel$	$\begin{array}{c} \vdots \\ \vee_x A(x) \\ A(n) \end{array}$	$(P \text{ choisit le } n)$
$(O_{\vee})$	$\begin{array}{c} \vdots \\ \vee_x A(x) \\ \vdots \\ A(n) \end{array} \parallel$	$\begin{array}{c} \vdots \\ ? \end{array}$	$(O \text{ choisit le } n)$
$(P_{\rightarrow})$	$\begin{array}{c} \vdots \\ A \end{array} \parallel$	$\begin{array}{c} \vdots \\ A \rightarrow B \\ [B] \end{array}$	

Dans ce dernier tableau, B est écrit entre crochets parce que P n'est pas obligé de répondre tout de suite par B . Il peut d'abord attaquer les affirma-

tions que O a posées jusque là (y compris A). Il reste cependant lié à l'obligation de défendre B , à moins que le dialogue ne se termine avant.

$$(O \rightarrow) \quad \begin{array}{c} \vdots \\ A \rightarrow B \\ \vdots \\ B \end{array} \parallel \begin{array}{c} \vdots \\ A \end{array}$$

P doit connaître une stratégie de gain pour le sous-tableau de gauche où il a affirmé A et une pour le sous-tableau de droite dans lequel O soutient encore B .

Les tableaux pour $\neg$ sont des cas particuliers de ceux pour $\rightarrow$:

$$(P \neg) \quad \begin{array}{c} \vdots \\ A \end{array} \parallel \begin{array}{c} \vdots \\ \neg A \\ [\wedge] \end{array}$$

$$(O \neg) \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \neg A \\ \vdots \end{array} \parallel \begin{array}{c} \vdots \\ A \end{array}$$

Si, en jouant selon ces 14 schémas, P peut atteindre dans chaque sous-tableau l'une des situations finales suivantes (c est une proposition primitive) :

$$\begin{array}{c} \vdots \\ c \end{array} \parallel \begin{array}{c} \vdots \\ c \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \wedge \end{array} \parallel \begin{array}{c} \vdots \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \end{array} \parallel \begin{array}{c} \vdots \\ \vee \end{array}$$

il connaît alors une stratégie de gain. Et c'est dans ce cas et dans ce cas seulement que nous dirons qu'il est à même de démontrer la vérité logique effective de sa première proposition. Il est facile de formuler la définition d'une « stratégie de gain » de telle sorte qu'on parvienne à un procédé qui permet d'obtenir systématiquement toutes les stratégies gagnantes. Du même coup, ce procédé fournira toutes les formules logiquement vraies de façon effective. On connaît depuis longtemps des procédés pour obtenir toutes les formules logiquement vraies, généralement en logique classique. Il s'agit des calculs logiques qui ont déjà leur origine dans l'Antiquité mais qui ne furent explicitement mis sous forme de calculs que depuis FREGE (1879). Il est vrai que LEIBNIZ avait formulé clairement les conditions d'un calcul logique, mais sans les avoir réalisées.

Sommairement dit, un calcul est un procédé pour obtenir des formules (des figures) qui n'utilise que de règles schématiques. Nous préciserons cette notion au Chapitre III pour en faire un objet d'étude mathématique. Jusqu'à là nous n'aurons pas besoin d'une théorie générale des calculs et nous n'aurons affaire qu'à des calculs particuliers.

Proposons-nous d'engendrer toutes les formules logiquement vraies par un procédé schématique. Le critère d'existence d'une stratégie de gain peut alors nous servir. Il suffit d'essayer de construire l'une après l'autre chacune des stratégies, en procédant *de bas en haut*. C'est BETH (1955) qui, le premier, a remarqué ce lien entre calculs et tableaux.

Nous avons déjà donné les situations finales de toutes les stratégies de gain. Les 14 schémas $(P_{\wedge})$ à $(O_{\neg})$ montrent quelles sont les possibilités, si on les lit de bas en haut, d'augmenter d'une ligne la partie finale d'une stratégie. (Le nombre 14 résulte de ce qu'on dispose en général de deux schémas pour chacune des 6 particules logiques : un pour P et un pour O . Il n'y a trois schémas que pour $\vee$ et $\wedge$).

A chaque ligne d'un tableau, ou d'un sous-tableau, toutes les thèses de l'opposant O qui précèdent entrent en ligne de compte pour poursuivre le dialogue. En revanche, parmi les thèses du propositant P , seule est utilisable la dernière soutenue. On peut en conséquence décrire après chaque ligne l'« état » du dialogue, en indiquant toutes les thèses que O a soutenues jusque là et la dernière thèse de P , par exemple sous la forme :

$$A_1, A_2, \dots, A_r \parallel B.$$

Conformément à la terminologie de GENTZEN (1934), nous nommerons *séquence* une écriture de cette sorte. A gauche de $\parallel$ se trouve une suite finie, éventuellement vide, de formules et nous utiliserons F comme variable pour ces suites.

Les situations finales des stratégies de gain correspondent alors aux séquences suivantes :

$$\begin{array}{l} F(c) \parallel c \\ F(\wedge) \parallel B \\ F \parallel \vee \end{array}$$

où $F(c)$ et $F(\wedge)$ désignent des suites dans lesquelles figurent respectivement c et $\wedge$.

On peut maintenant considérer les 14 schémas $(P_{\wedge}) - (O_{\neg})$ comme des règles qui permettent d'obtenir de nouvelles séquences à partir de celles qu'elles contiennent et que nous appellerons *séquences fondamentales*. Le signe $\Rightarrow$ sert à indiquer les règles et les « prémisses » sont séparées par une double virgule.

Les 14 règles qu'on obtient ainsi pour les séquences ont la forme suivante :

- $$\begin{aligned}
 (P_{\wedge}) \quad & F \parallel A, F \parallel B \Rightarrow F \parallel A \wedge B \\
 (O_{\wedge}) \quad & F(A \wedge B), A \parallel C \Rightarrow F(A \wedge B) \parallel C \\
 & F(A \wedge B), B \parallel C \Rightarrow F(A \wedge B) \parallel C \\
 (P_{\vee}) \quad & F \parallel A \Rightarrow F \parallel A \vee B \\
 & F \parallel B \Rightarrow F \parallel A \vee B \\
 (O_{\vee}) \quad & F(A \vee B), A \parallel C, F(A \vee B), B \parallel C \Rightarrow F(A \vee B) \parallel C \\
 (P_{\rightarrow}) \quad & F, A \parallel B \Rightarrow F \parallel A \rightarrow B \\
 (O_{\rightarrow}) \quad & F(A \rightarrow B) \parallel A, F(A \rightarrow B), B \parallel C \Rightarrow F(A \rightarrow B) \parallel C \\
 (P_{\neg}) \quad & F, A \parallel \neg A \\
 (O_{\neg}) \quad & F(\neg A) \parallel A \Rightarrow F(\neg A) \parallel C \\
 (P_{\wedge x}) \quad & F \parallel A(n) \Rightarrow F \parallel \wedge_x A(x)
 \end{aligned}$$

si n est une constante qui ne figure ni dans F ni dans $\wedge_x A(x)$.

- $$\begin{aligned}
 (O_{\wedge x}) \quad & F(\wedge_x A(x)), A(n) \parallel C \Rightarrow F(\wedge_x A(x)) \parallel C \\
 (P_{\vee x}) \quad & F \parallel A(n) \Rightarrow F \parallel \vee_x A(x) \\
 (O_{\vee x}) \quad & F(\vee_x A(x)), A(n) \parallel C \Rightarrow F(\vee_x A(x)) \parallel C
 \end{aligned}$$

si n est une constante qui ne figure ni dans $F(\vee_x A(x))$ ni dans C .

Les conditions sur n , qu'on rencontre dans les règles $P(\wedge)$ et $(O_{\vee})$, résultent de ce que O peut dans ces cas-là choisir n . Le choix défavorable pour P est celui d'une constante qui ne s'est pas encore présentée.

Le calcul des séquences que nous venons de décrire et auquel nous sommes parvenus en nous basant sur une interprétation « opératoire » des particules logiques (cf. LORENZEN 1955), est dû à GENTZEN (1934), mais sans interprétation et en s'appuyant uniquement sur le caractère « naturel » des règles. Il a montré que son calcul permettait de déduire exactement les mêmes formules que celui que HEYTING (1930) avait construit pour formaliser la logique intuitionniste. Il s'ensuit que notre concept de vérité logique effective est exactement conforme au concept intuitionniste de vérité logique (au sens où HEYTING l'a précisé).

La logique que nous avons obtenue se distingue de la logique classique des joncteurs par deux aspects :

- (1) Elle considère non seulement les propositions composées à l'aide des joncteurs, mais aussi celles obtenues à l'aide des quantificateurs. C'est donc une logique des quantificateurs.
- (2) Elle affaiblit les règles classiques de la logique des joncteurs en ne se limitant pas aux propositions v -définies. L'adjonction, la conditionnelle

et tout particulièrement la négation sont utilisées en un sens effectif. C'est donc une logique effective des quantificateurs.

Le calcul des séquences de la logique effective des quantificateurs ne nous fournit pas seulement des formules logiques effectivement vraies, puisqu'il ne nous donne pas seulement des séquences $F \parallel A$ où F est vide, mais aussi des séquences où F n'est pas vide. Si $A_1, \dots, A_r \parallel B$ est dérivable dans le calcul des séquences, le proposant P peut soutenir B contre tout opposant O qui, de son côté est disposé à soutenir $A_1, \dots, A_r$. Nous dirons donc qu'il est possible de passer logiquement et de façon effective des prémisses $A_1, \dots, A_r$ à la conclusion B . Et nous avons encore défini par là ce qu'est une « déduction logique en logique effective ».

Pour prouver la validité effective d'une déduction logique de B à partir de $A_1, \dots, A_r$, au lieu de chercher une stratégie de gain dans un dialogue de forme initiale $A_1, \dots, A_r \parallel B$, il s'agit maintenant de dériver cette séquence à partir des séquences fondamentales en utilisant les 14 règles $(P_\wedge) - (O_\vee)$, c'est-à-dire de procéder pas à pas.

Voyons la chose sur l'exemple suivant :

$$a \rightarrow b \parallel \neg b \rightarrow \neg a$$

Le tableau d'une stratégie de gain se présente ainsi :

$$\begin{array}{c|c} a \rightarrow b & \neg b \rightarrow \neg a \\ \neg b & \neg a \\ a & a \\ ? \mid b & a \mid b \end{array}$$

Le déroulement du dialogue est donné par les séquences suivantes :

$$\begin{array}{l} a \rightarrow b \parallel \neg b \rightarrow \neg a \\ a \rightarrow b, \neg b \parallel \neg a \\ a \rightarrow b, \neg b, a \parallel \wedge \\ a \rightarrow b, \neg b, a \parallel a \qquad a \rightarrow b, \neg b, a, b \parallel \wedge \\ a \rightarrow b, \neg b, a, b \parallel b \end{array}$$

En lisant de bas en haut, on obtient une dérivation dans le calcul des séquences qui, arrangée linéairement, peut s'écrire :

$$\begin{array}{ll} (1) & a \rightarrow b, \neg b, a \parallel a \\ (2) & a \rightarrow b, \neg b, a, b \parallel b \\ (3) & a \rightarrow b, \neg b, a, b \parallel \wedge & O_{\neg} (2) \\ (4) & a \rightarrow b, \neg b, a \parallel \wedge & O_{\rightarrow} (1) (3) \\ (5) & a \rightarrow b, \neg b \parallel \neg a & P_{\neg} (4) \\ (6) & a \rightarrow b \parallel \neg b \rightarrow \neg a & P_{\rightarrow} (5) \end{array}$$

Une dérivation dans le calcul des séquences ne constitue pas une déduction logique, mais une façon schématique d'opérer pour engendrer des séquences qui, de leur côté, représentent la déduction logique. Il existe toutefois un lien étroit entre la conséquence logique et la dérivation dans le calcul des séquences. Il s'exprimera par le « théorème de la déduction ». Il nous faut, pour cela, introduire, la notion de dérivabilité relative. Si l'on ajoute aux séquences fondamentales du calcul certaines séquences $S_1, S_2, \dots$ et si, dans le calcul ainsi étendu, une séquence S est dérivable, on dira que S est *relativement dérivable* dans le calcul à partir de $S_1, S_2, \dots$.

Théorème de la déduction : Si, dans le calcul des séquences, $\| B$ est dérivable à partir de $\| A_1, \dots, \| A_r, A_1, \dots, A_r \| B$ l'est aussi (*absolument*).

Pour le prouver, il suffit de transformer une dérivation relative de $\| B$ à partir de $\| A_1, \dots, \| A_r$ de telle façon que toute séquence $F \| C$ qu'on rencontre soit remplacée par $A_1, \dots, A_r, F \| C$. On voit immédiatement par les règles du calcul qu'on obtiendra ainsi, après changement éventuel des constantes, une dérivation de $A_1, \dots, A_r \| B$ à partir des séquences $A_1, \dots, A_r \| A_1, A_1, \dots, A_r \| A_2, \dots, A_1, \dots, A_r \| A_r$. Il ne reste plus alors qu'à montrer que ces séquences sont (*absolument*) dérivables, c'est-à-dire que $F(A) \| A$ est dérivable dans le calcul, quelque soit la formule A .

Nous exprimerons la chose par un lemme particulier :

Lemme : $F(A) \| A$ est dérivable.

Preuve : Pour des formules atomiques $A, F(A) \| A$ est une séquence fondamentale. Si nous admettons maintenant que la thèse est prouvée pour toutes les sous-formules de A , le lemme s'établira sous forme générale par une induction sur les sous-formules. Il faut distinguer les cas où A est composée de l'une des façons suivantes : $A_1 \wedge A_2, A_1 \vee A_2, A_1 \rightarrow A_2, \neg A_0, \wedge_x A_0(x), \vee_x A_0(x)$. Dans le premier cas, il vient : $F(A_1 \wedge A_2) \| A_1$ et $F(A_1 \wedge A_2) \| A_2$. Ces séquences sont à leur tour dérivables puisque, par hypothèse d'induction, $F(A_1 \wedge A_2), A_1 \| A_1$ et $F(A_1 \wedge A_2), A_2 \| A_2$ sont dérivables. $F(\neg A_0) \| \neg A_0$ peut se dériver de $F(\neg A_0), A_0 \| A_0$ par l'intermédiaire de $F(\neg A_0), A_0 \| \wedge$. $F(\wedge_x A_0(x)) \| \wedge_x A_0(x)$ peut se dériver de $F(\wedge_x A_0(x)), A_0(n) \| A_0(n)$ par l'intermédiaire de $F(\wedge_x A_0(x)) \| A_0(n)$, avec un n qui n'y figure pas encore. Les autres cas sont à traiter d'une manière analogue.

Le lemme et le théorème de la déduction sont ainsi prouvés.

S'il est possible de déduire logiquement et de façon effective une formule B d'une formule A , nous dirons que la formule A *implique logiquement et effectivement* la formule B ⁸. Nous écrirons denouveau $A < B$ pour cette

8. Je dira aussi à l'occasion « A *l*-implique effectivement B ».

implication. On voit immédiatement que le passage de plusieurs prémisses $A_1, \dots, A_r$ à B est une déduction logique si et seulement si la conjonction $A_1 \wedge \dots \wedge A_r$ implique logiquement B . On pourra donc se borner à considérer des implications au lieu de séquences.

Il est possible de construire pour ces implications un calcul qui est formellement plus simple que celui des séquences. Dans la littérature, la plupart des calculs traités sur le modèle de celui de FREGE ont comme figures dérivables les formules *l-vraies*. Ces divers calculs sont toutefois essentiellement équivalents entre eux. Nous n'examinerons pas ici les diverses possibilités, en particulier, parce que pour arriver au calcul classique des quantificateurs, nous formulerons au paragraphe suivant un calcul de l'implication pour la logique classique des joncteurs.

§ 3. Logique classique des quantificateurs

La logique classique des quantificateurs ne remonte qu'à la deuxième moitié de XIX^e siècle et en particulier aux travaux de FREGE (1875). Elle naquit de la fusion de la syllogistique aristotélicienne avec la logique classique des joncteurs de l'Antiquité redécouverte par BOOLE (1847) et de la scolastique. On peut l'obtenir en transportant formellement les présupposés de la logique classique des joncteurs à celle des quantificateurs, sans revenir sur les raisons exposées au §2 qui s'opposaient à cette façon de faire et qui nous ont conduit à la logique effective.

Cherchons tout d'abord un calcul qui engendre toutes les formules implicatives $A < B$, telles que A implique B au sens de la logique classique des joncteurs. Appelons pour faire bref *implications* ces formules implicatives et disons qu'une telle implication $A < B$ est *effectivement valide* ou *classiquement valide* selon que A implique effectivement ou classiquement B . Le problème de trouver un calcul de l'implication n'admet évidemment pas de solution univoquement déterminée. Pour ne pas nous perdre dans l'arbitraire, nous allons nous tourner du côté du calcul effectif des séquences, en nous limitant aux seuls joncteurs importants en logique classique : $\wedge$, $\vee$, et $\neg$.

Les séquences avaient la forme $F \parallel C$ où F désignait une suite de formules $A_1, \dots, A_r$, éventuellement vide. Pour obtenir des implications, remplaçons $A_1, \dots, A_r$ par la conjonction $A_1 \wedge \dots \wedge A_r$. Nous conviendrons pour cela que l'ordre des termes de la conjonction et la façon dont ils sont groupés n'importent pas. Ainsi la formule $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$ sera considérée comme « essentiellement pareille » à la formule $A_2 \wedge A_1 \wedge A_3$. Nous pouvons remplacer une suite vide F par $\vee$. Appelons *formules conjonctives* le signe $\vee$ de même que les formules $A_1 \wedge \dots \wedge A_r$ où $A_1, \dots, A_r$ ne sont plus elles-

mêmes des conjonctions et appelons enfin $\vee$ et $A_1, \dots, A_r$ les *termes* de la formule conjonctive.

Si maintenant nous utilisons F comme variable pour les formules conjonctives, nous obtiendrons à partir des séquences fondamentales du calcul des séquences les implications fondamentales suivantes :

$$\begin{aligned} F \wedge c &< c \\ F \wedge \wedge &< C \\ F &< \vee \end{aligned}$$

Ici encore l'ordre et les groupements dans les formules conjonctives de gauche n'entrent pas en ligne de compte et F peut aussi être vide. Ainsi :

$$A \wedge c \wedge B < c \text{ et } \wedge < C$$

sont aussi des implications fondamentales.

Traduisons maintenant en implications les règles du calcul des séquences pour $\wedge$, $\vee$ et $\neg$. Pour $\wedge$, il suffira de prendre la règle :

$$F < A, F < B \Rightarrow F < A \wedge B$$

En effet les deux règles :

$$\begin{aligned} F \wedge A < C &\Rightarrow F \wedge A \wedge B < C \\ F \wedge B < C &\Rightarrow F \wedge A \wedge B < C \end{aligned}$$

qui sont « essentiellement pareilles » s'avèrent superflues.

Pour $\vee$, les règles du calcul des séquences donnent :

$$\begin{aligned} F < A &\Rightarrow F < A \vee B \\ F < B &\Rightarrow F < A \vee B \\ F \wedge A < C, F \wedge B < C &\Rightarrow F \wedge A \vee B < C \end{aligned}$$

On a ici, pour simplifier, laissé de côté la supposition que $A \vee B$ figurait comme terme conjonctif dans F , ce qui ne touche évidemment pas à la validité.

Une simplification analogue donne pour $\neg$:

$$\begin{aligned} F \wedge A < \wedge &\Rightarrow F < \neg A \\ F < A &\Rightarrow F \wedge \neg A < C \end{aligned}$$

Il va de soi qu'un tel calcul effectif des joncteurs (sans $\rightarrow$) ne fournit que des implications qui sont aussi classiquement valides. En effet, si une formule implicative $A < B$ peut être interprétée en termes de valeurs de vérité de telle façon que A étant vraie, B devienne fausse, l'opposant pourra gagner

facilement un dialogue dans lequel il affirme A , tandis que le proposant affirme B . Inversement, le calcul de l'implication ci-dessus ne fournit pas *toutes* les implications classiquement valides : certainement pas $\forall < a \vee \neg a$ par exemple, puisque cette implication n'est pas effectivement valide.

On peut, en exploitant la symétrie (ou *dualité*) qui existe en logique classique des joncteurs entre $\wedge$ et $\vee$ arriver à de nouvelles règles qui sont encore admissibles dans un calcul classique. Si, en interprétant une formule en terme de valeurs de vérité, on échange toujours $\forall$ et $\wedge$ en même temps que $\wedge$ et $\vee$, la formule prend la valeur opposée. En particulier si on a, au sens classique, $A < B$ on aura aussi $B' < A'$ si A' et B' sont les expressions qui résultent respectivement de A et B par l'échange de $\wedge$ et $\vee$.

Ces considérations conduisent à un calcul de l'implication qui correspond au calcul des séquences de GENTZEN pour la logique classique. Pour introduire complètement la symétrie (la dualité), on utilisera, à côté des formules conjonctives F qui figuraient jusqu'ici à gauche de $<$, les *formules adjonctives* G qui devront figurer à droite. Dans de telles formules adjonctives $B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_r$, l'ordre et les groupements ne joueront de nouveau aucun rôle. $\wedge$ représente la formule adjonctive vide. Nous nommerons simplement *antécédents* les termes de F et *conséquents* ceux de G .

Construisons avec ces conventions le calcul classique des joncteurs. Les implications fondamentales deviendront :

$$(G) \quad \begin{cases} F \wedge c < c \vee G \\ F \wedge \wedge < G \\ F < \forall \vee G \end{cases}$$

Les règles seront :

$$(J) \quad \begin{cases} F < A \vee G, F < B \vee G \Rightarrow F < A \wedge B \vee G \\ F \wedge A < G, F \wedge B < G \Rightarrow F \wedge A \vee B < G \\ F \wedge A < G \Rightarrow F < \neg A \vee G \\ F < A \vee G \Rightarrow F \wedge \neg A < G \end{cases}$$

Une particularité de ce calcul consiste en ce que ses règles peuvent être retournées. Ainsi par exemple les règles :

$$\begin{aligned} F < A \wedge B \vee G &\Rightarrow F < A \vee G \\ F < \neg A \vee G &\Rightarrow F \wedge A < G \end{aligned}$$

sont *admissibles*, c'est-à-dire que, à partir d'implications valides, elles conduisent toujours de nouveau à des implications valides. Cette particularité permet de montrer sans peine la complétude du calcul, c'est-à-dire la possibilité d'y dériver *toutes* les implications classiquement valides.

Supposons qu'une implication classiquement valide ait la forme « primitive »

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \dots < b_1 \vee b_2 \vee \dots$$

avec, à gauche et à droite, des symboles de propositions et respectivement les formules $\vee$ et $\wedge$. On doit alors avoir : (1) un $\wedge$ à gauche ou (2) un $\vee$ à droite ou (3) un des a_μ de gauche qui correspond à un des b_ν de droite. Sans cela on pourrait immédiatement fournir un modèle pour la formule de gauche qui n'en serait pas un pour celle de droite. Toutes ces implications primitives sont, d'après (G), des implications fondamentales. Si une implication n'est pas primitive, elle a une des formes suivantes :

$$\begin{array}{ll} & F < A \wedge B \vee G \\ \text{ou} & F \wedge A \vee B < G \\ \text{ou} & F < \neg A \vee G \\ \text{ou} & F \wedge \neg A < G \end{array}$$

Ce sont en effet les seuls cas où à droite ne figure pas seulement $\vee$ et à gauche pas seulement $\wedge$.

Mais pour dériver de telles implications valides, nos règles (J) suffisent. Les implications à gauche de $\Rightarrow$ y sont valides, si l'implication à droite de $\Rightarrow$ l'est aussi. Dans ces règles les implications à gauche de $\Rightarrow$ contiennent soit un $\neg$ de moins, soit à droite de $<$ un $\wedge$ de moins, soit encore à gauche de $<$ un $\vee$ de moins. On parvient donc à des implications primitives valides en un nombre fini de pas et la complétude est ainsi établie.

Comme nous savons déjà que toutes les implications classiquement valides ne le sont pas aussi effectivement et comme il est évident que les implications fondamentales (G) sont effectivement valides, il doit y avoir au moins une de nos règles (J) qui n'est pas admissible pour le calcul de la logique effective des joncteurs, c'est-à-dire qui ne conduit pas toujours d'implications effectivement valides à d'autres qui le sont encore.

Il y a exactement une règle de cette espèce :

$$F \wedge A < G \Rightarrow F < \neg A \vee G$$

Elle n'est, en effet, admissible pour le calcul effectif que si on remplace G par $\wedge$:

$$A \wedge B < \wedge \Rightarrow A < \neg B,$$

mais elle ne l'est pas pour un G quelconque. Ainsi, par exemple, $\vee \wedge b < b$ est effectivement valide, mais pas $\vee < \neg b \vee b$.

Le calcul classique des joncteurs résulte donc du calcul effectif par l'adjonction d'une règle supplémentaire : il en est une extension. Il faut toutefois

remarquer que cette extension classique, comme elle vient d'être faite, est déjà univoquement déterminée par la logique effective. La logique classique des joncteurs constitue, en effet, la plus grande extension consistante possible de la logique effective. Plus précisément cela signifie qu'une forme propositionnelle A , telle que $\forall < A$, ne peut être ajoutée au calcul effectif en tant qu'implication fondamentale sans qu'on en puisse dériver $\forall < \wedge$, que si elle est classiquement l -vraie.

Si A n'était en effet pas classiquement l -vraie, il existerait une interprétation dans laquelle A pourrait prendre la valeur $\wedge$. Il résulterait alors de A , par substitution, une formule A' construite uniquement à partir de $\forall$ et $\wedge$ telle qu'on aurait classiquement $A' \asymp \wedge$. Mais il est facile d'exprimer les tables de vérité classiques sous la forme d'équivalences logiques effectives. Par exemple :

$$\begin{array}{lll} \forall \wedge \forall \asymp \forall & \forall \vee \wedge \asymp \forall & \neg \forall \asymp \wedge \\ \forall \wedge \wedge \asymp \wedge & \wedge \vee \wedge \asymp \wedge & \end{array}$$

La dérivabilité de $\forall < \wedge$ découlerait immédiatement de l'implication fondamentale $\forall < A'$ par la transitivité de $<$ (voir à ce propos §§ 6, 7).

Revenons maintenant au calcul effectif des séquences du § 2 et traduisons ses règles pour les quantificateurs en règles pour les implications. Nous nous limiterons en même temps aux formules sans constantes, ce qui fait que dans les règles du calcul des séquences, les constantes devront être remplacées par des variables d'objet libres. Les conditions supplémentaires pour n dans $(P_{\wedge})$ et $(O_{\vee})$ donnent ainsi lieu à certaines conditions sur les variables, sur la formation exacte desquelles nous ne nous attarderons pas pour l'instant (Cf. § 6).

Nous obtenons ainsi le système de règles suivant :

$$\begin{array}{ll} F < A(y) \Rightarrow F < \wedge_x A(x) & \text{(Condition sur } y) \\ F \wedge \wedge_x A(x) \wedge A(y) < C \Rightarrow F \wedge \wedge_x A(x) < C & \\ F < A(y) \Rightarrow F < \vee_x A(x) & \\ F \wedge \vee_x A(x) \wedge A(y) < C \Rightarrow F \wedge \vee_x A(x) < C & \text{(Condition sur } y) \end{array}$$

Si nous étendons aux quantificateurs $\wedge_x$ et $\vee_x$ la dualité classique entre $\wedge$ et $\vee$ — sans nous appuyer toutefois sur une interprétation des contenus — nous obtiendrons avec de légères modifications les règles suivantes :

$$(Q) \quad \left\{ \begin{array}{ll} F < A(y) \vee G \Rightarrow F < \wedge_x A(x) \vee G & \text{(Condition sur } y) \\ F \wedge \wedge_x A(x) \wedge A(y) < G \Rightarrow F \wedge \wedge_x A(x) < G & \\ F \wedge A(y) < G \Rightarrow F \wedge \vee_x A(x) < G & \text{(Condition sur } y) \\ F < A(y) \vee \vee_x A(x) \vee G \Rightarrow F < \vee_x A(x) \vee G & \end{array} \right.$$

En écrivant la deuxième et la quatrième de ces règles, qui n'ont pas d'analogues dans la logique classique des joncteurs, nous avons conservé dans les implications à gauche du signe $\Rightarrow$ les termes $\bigwedge_x A(x)$ et $\bigvee_x A(x)$, cela afin de pouvoir encore les inverser. Toutes les inversions sont même admissibles dans la logique effective des quantificateurs, c'est-à-dire qu'elles conduiront d'implications effectivement valides à d'autres qui le seront encore. Parmi les règles elles-mêmes, seule la première n'est pas admissible du point de vue effectif. Il faudrait de nouveau pour cela restreindre G à la formule adjonctive vide :

$$F < A(y) \Rightarrow F < \bigwedge_x A(x)$$

Ainsi par exemple $\bigwedge_x . a \vee b(x) . < a \vee b(y)$ est effectivement valide mais $\bigwedge_x . a \vee b(x) . < a \vee \bigwedge_x b(x)$ ne l'est pas.

En résumé, nous sommes maintenant parvenus à un calcul qui prend (G) comme implications fondamentales et a (J) et (Q) comme règles. Nous l'appellerons le *calcul classique des quantificateurs*. Nous l'avons obtenu à partir des règles de la logique effective en empruntant la symétrie (la dualité) à la logique classique des joncteurs. Mais contrairement à ce qui se passait pour la logique classique des joncteurs et pour celle effective des quantificateurs, il n'y a ici à première vue aucune interprétation qui justifie la procédure. Il est, par exemple, facile de voir que l'implication

$$\neg \bigwedge_x a(x) < \bigvee_x \neg a(x)$$

est dérivable en logique classique. Pour ce qui concerne toutefois sa validité, on ne peut faire appel ni aux valeurs de vérité de propositions v -définies, ni à l'existence d'une stratégie de gain. (K. LORENZ a cependant montré dans sa thèse, Kiel 1961, comment modifier les règles du dialogue pour qu'il soit possible d'obtenir toutes les implications classiquement valides). On en appelle souvent à un « sentiment du langage naturel » qui ressent comme immédiatement « vraies » des propositions de la forme « si $a(x)$ n'est pas valable pour tout x , non $a(x)$ l'est pour quelque x ». Un tel recours aux langues naturelles ne saurait toutefois être très concluant en mathématiques. Et c'est précisément une des tâches fondamentale de la métamathématique que de justifier la logique classique des quantificateurs, sans s'appuyer sur la langue naturelle, mais en utilisant uniquement les mathématiques constructives, y compris celles de la logique effective des quantificateurs.

Le problème ainsi posé est ce qu'on appelle une preuve de consistance et nous le traiterons au chapitre II. Nous l'entendrons comme l'obligation de montrer que, dans toute théorie constructive, il est possible d'appliquer les règles du calcul classique des quantificateurs à la place de celles de la logique

effective sans qu'il en résulte de contradiction, c'est-à-dire sans qu'on puisse, pour une formule A , prouver à la fois A et $\neg A$. Pour ne pas nous heurter à une tâche sans issue, il nous faudra entendre l'expression « théorie constructive » de sorte que seules entrent en ligne de compte les théories qui peuvent se traiter au sein de l'arithmétique constructive. L'arithmétique joue ainsi le rôle de représentant pour toutes les mathématiques constructives et la consistance de la logique classique des quantificateurs revient à celle de l'arithmétique classique.

Avant de passer à l'arithmétique, il nous faut encore examiner brièvement la logique de l'égalité (§4). Notons toutefois encore, par mesure de précaution, que la méthode d'interprétation en valeurs de vérité ne peut sans autre s'étendre de la logique classique des joncteurs à celle des quantificateurs. Soit en effet une formule fondamentale $a(x)$. On ne peut l'interpréter par $\vee$ ou $\wedge$ et c'est $a(n)$ qui devra être, pour chaque valeur de n , interprétée par $\vee$ ou $\wedge$. En conséquence le symbole central a de la formule $a(x)$ doit être considéré comme une « fonction » (cf. §4) qui, à tout argument constant n , fait correspondre la valeur $\vee$ ou $\wedge$. Dans le cas d'une infinité de constantes — et il serait arbitraire de se limiter au fini ce qui conduirait à se limiter à la logique des joncteurs — la valeur d'une formule composée n'est alors plus décidable. Comment savoir, par exemple, que $\bigwedge_x a(x) \vee \bigvee_x \neg a(x)$ prendra la valeur $\vee$ pour toute interprétation? Si l'on répond que c'est « parce que $a(n)$ prend la valeur $\vee$ pour tout n ou la valeur $\wedge$ pour un n au moins », on n'aura fait que répéter la donnée. On pourrait naturellement répondre de cette manière dans une théorie axiomatique des interprétations, c'est-à-dire dans une sémantique, qui utilise la logique classique des quantificateurs. Mais la question se poserait alors de savoir si cette théorie est consistante. De même la preuve de complétude du calcul classique des joncteurs ne peut se généraliser à celui des quantificateurs (GÖDEL 1930 : Toute formule classiquement valide est dérivable) que dans une métathéorie qui contient la logique classique. Nous y reviendrons au chapitre IV.

§4. Logique de l'égalité

Tout usage de symboles, aussi bien dans la langue naturelle qu'en mathématiques, réclame que chacun d'eux puisse être produit en autant d'exemplaires qu'on voudra et chaque fois reconnu comme tel. On ne dépend ainsi jamais d'une mention singulière. Qu'une proposition scientifique, par exemple, soit énoncée à haute et intelligible voix ou seulement murmurée, ne change rien à sa portée scientifique. Et de même rien dans les règles qui permettent d'opérer avec des figures, c'est-à-dire avec des compositions de symboles, ne dépend de telle réalisation des symboles et de leur composition.

Bien plus, la pratique montre que tout repose sur la faculté de reconnaître la figure comme *cette* composition de *ces* symboles. Dans les cas simples, il n'est pas indispensable de réfléchir à ce que signifie « l'égalité » de deux mentions, c'est-à-dire au fait qu'elles sont mentions d'une même figure (et on ne se tromperait guère en entendant cette explication dans la langue naturelle comme un réalisme dogmatique),

Mais en arithmétique déjà, lorsqu'on introduit des opérations comme la multiplication par exemple, qu'on énonce des règles pour « calculer » des produits et qu'on note le résultat sous la forme $\frac{(m \cdot n)}{p}$ (*m* fois *n* donne *p*), il est pour le moins très souhaitable de pouvoir exprimer l'unicité du résultat sous la forme d'une règle :

$$\frac{m \cdot n}{p} \text{ ,, } \frac{m \cdot n}{q} \Rightarrow p = q$$

la notation $p = q$ signifie précisément que les symboles numériques qui sont substitués aux variables *p* et *q* sont égaux.

Des écritures comme $m \cdot n = p$, et même des théorèmes du genre $m \cdot n = n \cdot m$, constituent des généralisations que doit examiner ce que nous appelons ici la logique de l'égalité pour en dégager le sens et pour les fonder (pour autant cependant qu'elles ne dépendent pas d'opérations particulières, comme celles de l'arithmétique par exemple).

Partons de la règle selon laquelle des propositions $A(x)$ et $A(y)$, propositions qui résultent l'une de l'autre par la substitution d'une même expression *y* à *x*, doivent avoir la même portée, c'est-à-dire que $A(x)$ peut être affirmée si et seulement si $A(y)$ peut l'être. Cette règle, qui pour l'instant est formulée dans la langue vulgaire, peut être analysée comme une règle du métaméta-niveau, à savoir comme la règle qui permet de passer de la proposition $x = y$ aux règles :

$$A(x) \Rightarrow A(y)$$

$$A(y) \Rightarrow A(x)$$

Si nous condensons ces deux règles en

$$A(x) \Leftrightarrow A(y)$$

nous obtiendrons la métarègle :

$$x = y \dot{\Rightarrow} A(x) \Leftrightarrow A(y)$$

Mais comme nous disposons déjà de la logique, (c'est-à-dire d'un système de composition des particules logiques), il nous est loisible de formuler cette

métarègle sous la forme d'une proposition au niveau de $A(x)$ et de $A(y)$. Elle aura la forme :

$$x = y \dot{\rightarrow} A(x) \leftrightarrow A(y)$$

Nous venons d'utiliser à côté de la conditionnelle $\rightarrow$, la *biconditionnelle* $\leftrightarrow$ qui se définit par :

$$a \leftrightarrow b \Leftrightarrow a \rightarrow b \wedge b \rightarrow a$$

La possibilité de passer d'un métaniveau à un niveau inférieur, le niveau d'objet, repose tout simplement sur la décision de ne pas considérer les propositions composées à l'aide des particules logiques comme constituant un niveau plus élevé. L'interprétation opératoire de la conditionnelle $\rightarrow$ pourrait bien justifier le passage à un niveau supérieur, mais, comme l'égalité des niveaux est admise en logique classique, nous l'admettrons aussi en logique effective.

Il reste encore à définir l'égalité elle-même, c'est-à-dire à préciser quand deux symboles sont égaux. Il s'agit simplement en pratique de savoir reconnaître un symbole. Sur le plan théorique, il suffit de poser qu'on doit avoir $x = x$, ce qu'on lit généralement : tout objet est égal à lui-même.

Pour l'arithmétique par exemple, on pourra définir l'égalité des symboles numériques $|$, $||$, $|||$, ... en posant :

$$\begin{aligned} &| = | \\ &x = y \rightarrow x| = y| \end{aligned}$$

On pourra alors prouver par induction (*cf.* ch. II) l'équation générale $x = x$.

Mais, aussi longtemps que nous ne voudrions envisager dans l'égalité que ce qui est valable dans toutes les théories, indépendamment d'un contenu particulier, il nous faudra partir des deux axiomes d'égalité suivant :

$$(4.1) \quad x = x$$

$$(4.2) \quad x = y \dot{\rightarrow} A(x) \leftrightarrow A(y)$$

Ces axiomes déterminent univoquement l'égalité, c'est-à-dire que s'ils sont satisfaits par deux relations $=_1$ et $=_2$, on a logiquement

$$x =_1 y \leftrightarrow x =_2 y$$

On a, en effet par (4.2) :

$$x =_1 y \dot{\rightarrow} z =_2 x \rightarrow z =_2 y$$

en prenant $z =_2 x$ pour $A(x)$.

D'où il suit

$$\begin{array}{ll} & x =_1 y \dot{\rightarrow} x =_2 x \rightarrow x =_2 y \\ \text{donc} & x =_1 y \rightarrow x =_2 y \\ \text{puisque} & x =_2 x \end{array}$$

L'axiome d'égalité (4.2) qui précède est logiquement équivalent à la conjonction de

$$(4.3) \quad x = y \wedge A(x) \rightarrow A(y)$$

$$(4.4) \quad x = y \wedge A(y) \rightarrow A(x)$$

Pour économiser la ponctuation, nous conviendrons que, dans toute composition, $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$ doivent être appliqués après $\wedge$ et $\vee$.

Le théorème suivant, qui figure déjà comme « axiome » chez EUCLIDE est une conséquence de ces axiomes : Si deux grandeurs sont égales à une troisième, elles sont égales entre elles. En effet, on tire de (4.4) en posant $z = y$ pour $A(y)$:

$$(4.5) \quad x = y \wedge z = y \rightarrow z = x$$

De même, (4.3) donne :

$$(4.6) \quad x = y \wedge x = z \rightarrow y = z$$

Nous appellerons *comparativité* à droite (respectivement à gauche) la propriété (4.5) (respectivement (4.6)).

(4.5) et (4.6) sont logiquement équivalentes aux propriétés plus usuelles de symétrie et de transitivité :

$$(4.7) \quad x = y \rightarrow y = x$$

$$(4.8) \quad x = y \wedge y = z \rightarrow x = z,$$

comme on le vérifie immédiatement.

Ces propriétés découlent d'ailleurs déjà de (4.5) ou de (4.6) seules, si on utilise encore la réflexivité $x = x$, c'est-à-dire l'axiome d'égalité (4.1) ci-dessus.

Il est possible, en se basant sur cette propriété, de remplacer l'axiome (4.2) par l'axiome plus faible (4.3). En effet, la symétrie (4.7) découle déjà de (4.1) et de (4.3) et, avec (4.3), elle fournit (4.4), c'est-à-dire (4.2). On obtient ainsi le système d'axiomes tel qu'on le pose généralement :

$$\begin{array}{ll} \text{(GI)} & x = x \\ & x = y \wedge A(x) \rightarrow A(y) \end{array}$$

La logique de l'égalité a une importance toute particulière parce qu'elle est étroitement liée à la possibilité d'introduire des objets « abstraits ». L'exemple le plus courant d'une telle *abstraction* est fourni par les nombres rationnels.

Les fractions (positives) m/n sont des expressions construites à partir des symboles numériques m et n qui représentent des entiers positifs 1, 2, 3, ... Si m est divisible par n , m/n n'est qu'un nouveau symbole pour un entier positif, à savoir pour le quotient q tel que $m = q \cdot n$. En revanche, si m n'est pas divisible par n , la fraction n'est d'abord symbole d'aucun nombre. Il est toutefois possible de traiter les fractions *comme si* elles représentaient symboliquement certains objets, qu'on nommera alors des « nombres rationnels ». Puisque $m = q \cdot n$ entraîne $m \cdot p = q \cdot n \cdot p$, c'est-à-dire que la fraction m/n et la fraction amplifiée $(m \cdot p)/(n \cdot p)$ représentent le même entier positif (quand elles en représentent un), on pose que, dans le cas général encore, deux fractions « représentent le même objet » si des simplifications appropriées les transforment en une même fraction.

On peut encore exprimer que deux fractions m_1/n_1 et m_2/n_2 « représentent le même objet » en posant qu'on doit avoir :

$$(4.9) \quad m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1$$

Au lieu de dire, ce qui n'est pas encore justifié, que les fractions représentent des nombres rationnels, nous ne ferons d'abord usage que de la relation entre les fractions m_1/n_1 et m_2/n_2 qui vient d'être définie par (4.9).

Nous écrirons par exemple :

$$\frac{m_1}{n_1} \sim \frac{m_2}{n_2} \Leftrightarrow m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1$$

expression dans la quelle on a, à gauche des fractions, à droite des entiers positifs, de sorte que les nombres rationnels n'apparaissent pas encore. L'abstraction qui conduit des fractions aux nombres rationnels ne signifie alors rien d'autre que la décision de limiter les propositions $A(m/n)$, qui portent sur des fractions, à celles $A(m_1/n_1)$ et $A(m_2/n_2)$, qui sont équivalentes dès que $m_1/n_1 \sim m_2/n_2$.

Restreindre ainsi les propositions — plus exactement les formes propositionnelles — à celles pour lesquelles on a

$$\frac{m_1}{n_1} \sim \frac{m_2}{n_2} \rightarrow A\left(\frac{m_1}{n_1}\right) \leftrightarrow A\left(\frac{m_2}{n_2}\right)$$

est une manière rigoureuse d'entendre ce qu'on a par ailleurs exprimé en disant qu'il fallait faire « abstraction » de certaines différences entre les objets

de départ (ici les fractions), qu'il fallait « abstraire » de nouveaux objets à partir des anciens. Et nous dirons alors que la forme propositionnelle A est *compatible* avec la relation $\sim$.

Nous allons maintenant formuler les propositions compatibles sur les fractions comme des propositions sur les nombres rationnels. On aura par exemple :

$$\frac{m_1}{n_1} \sim \frac{m_2}{n_2} \rightarrow m_1 > n_1 \leftrightarrow m_2 > n_2$$

La forme propositionnelle $m > n$ pourra alors se lire comme une forme propositionnelle $m/n > 1$ portant sur les nombres rationnels et plus seulement comme une forme propositionnelle portant sur les fractions. Dire que l'on « conçoit » m/n comme représentant un nombre rationnel, revient à dire que, parmi les propositions qui portent sur m/n , on a décidé de se limiter à celles qui sont compatibles avec $\sim$. Quant aux nombres rationnels eux-mêmes, il n'« existent » que pour autant qu'on en parle de cette façon-là.

Tournons-nous maintenant vers des objets quelconques $x, y, \dots$ entre lesquels on a défini une relation $\sim$. Il nous faudra de nouveau définir la compatibilité des formes propositionnelles $A(x)$ par la validité de :

$$x \sim y \rightarrow A(x) \leftrightarrow A(y)$$

Pour que la relation $x \sim y$ soit compatible avec elle-même, et cela avec les deux arguments x et y , il faut :

$$\begin{aligned} x \sim y \rightarrow x \sim z \rightarrow y \sim z \\ x \sim y \rightarrow z \sim x \rightarrow z \sim y \end{aligned}$$

Ces conditions sont logiquement équivalentes à la comparativité à gauche et à la transitivité (4.8). Appelons *égalités abstraites* les relations $\sim$ compatibles avec elles-mêmes. De telles égalités pourront aussi être caractérisées par la comparativité à gauche et à droite ou, par exemple, par la symétrie et la transitivité.

Une égalité abstraite qui est encore réflexive est dite *totale*, les autres pouvant être nommées *partielles*.

Soit alors une égalité abstraite partielle $\sim$, c'est-à-dire une relation symétrique et transitive. Limitons-la aux objets x tels que $x \sim x$. Ces objets x constituent la classe de réflexivité de $\sim$ et la relation est naturellement une égalité abstraite totale pour eux. Cela revient à limiter la relation aux seuls objets x pour lesquels il existe toujours un objet y tel que l'on ait $x \sim y$ ou $y \sim x$. On a donc par la comparativité à droite :

$$x \sim y \rightarrow x \sim x$$

et par la comparativité à gauche :

$$y \sim x \rightarrow x \sim x$$

Il nous suffira ainsi de considérer les égalités abstraites totales.

Toute égalité abstraite $\sim$ entre des objets (entre des figures) quelconques permet de parler de nouveaux objets « abstraits ». Si on a $x \sim y$, nous dirons que x et y représentent le même objet abstrait. Les propositions sur les objets abstraits sont définies comme celles qui portent sur les anciens objets et qui sont compatibles avec $\sim$. Et ce n'est que par là et dans cette mesure que sont « définis » les objets abstraits eux-mêmes. Écrivons maintenant $\tilde{x} = \tilde{y}$ au lieu de $x \sim y$ et considérons $\tilde{x}, \tilde{y}, \dots$ comme des noms pour les objets abstraits. Nous nous serons alors contentés d'introduire une nouvelle façon de parler et d'écrire, sans avoir rien changé d'autre.

A la suite du logicisme de FREGE (voir l'Introduction), on réduit le plus souvent aujourd'hui l'abstraction à des concepts ensemblistes. Les objets abstraits sont définis comme des ensembles d'objets de départ. Ainsi $\tilde{x}$, par exemple, est l'ensemble des z tels que $x \sim z$. On a alors en s'appuyant sur la définition de l'égalité en théorie des ensembles : $\tilde{x} = \tilde{y} \leftrightarrow x \sim y$. On postule de plus l'« existence » des ensembles.

Nous venons d'introduire l'abstraction comme une « façon de parler » et cela nous dispense de tout présupposé sur la théorie des ensembles. Inversement, ce procédé permet même de parler des « ensembles » comme d'objets abstraits. Nous partirons pour cela de ce qu'il est possible de concevoir les ensembles comme des concepts en extension. Plus précisément, nous allons remplacer les « concepts » de la langue vulgaire par les formes propositionnelles d'une théorie mathématique, disons par celles de l'arithmétique.

On peut alors définir pour ces formes propositionnelles $A_1(x), A_2(x), \dots$ une égalité abstraite en posant :

$$A_1(x) \sim A_2(x) \Leftarrow \bigwedge_x \cdot A_1(x) \leftrightarrow A_2(x).$$

La variable x qui figure dans le membre de droite est liée. Il ne s'agit donc pas d'une relation d'égalité entre formes propositionnelles, mais d'une relation entre formes propositionnelles par rapport à une variable. Il ne suffira donc pas, pour désigner l'objet abstrait représenté par $A(x)$, de noter $\tilde{A}(x)$. Il faudra encore que l'écriture signale la variable x . Nous écrirons donc, en faisant un usage nouveau du signe $\in$ usuel en théorie des ensembles, $\in_x A(x)$ au lieu de $\tilde{A}(x)$. Au lieu de dire que $A(x)$ représente un ensemble par rapport à x , nous pourrions dire alors que $\in_x A(x)$ désigne un ensemble. On aura :

$$\in_x A_1(x) = \in_x A_2(x) \leftrightarrow \bigwedge_x \cdot A_1(x) \leftrightarrow A_2(x)$$

et les *ensembles* ne seront rien d'autre que les *abstracta* des formes propositionnelles. Les ensembles finis, qu'on introduit généralement comme des collections d'objets, ne sont plus alors que des cas particuliers de nos *abstracta*. En effet, l'ensemble $\{n_1, \dots, n_r\}$ qui contient les éléments $n_1, \dots, n_r$ peut aussi être défini par $\in_x (x = n_1 \vee x = n_2 \vee \dots \vee x = n_r)$. Enfin, parler de « collections » à propos d'ensembles infinis peut difficilement signifier autre chose qu'avoir fait une abstraction à partir des formes propositionnelles qui représentent les ensembles.

Si $M = \in_x A(x)$, on définira la *relation d'appartenance* $\in$ par $y \in M \Leftrightarrow A(y)$.

Cette relation est évidemment compatible avec l'égalité abstraite entre les formes propositionnelles qui représentent les ensembles. Si l'on considère des formes propositionnelles dans lesquelles figurent plusieurs variables libres, on obtiendra des *relations* au lieu d'ensembles. Et on posera de nouveau:

$$\begin{aligned} \in_{x_1, \dots, x_r} A(x_1, \dots, x_r) &= \in_{x_1, \dots, x_r} B(x_1, \dots, x_r) \\ \Leftrightarrow \bigwedge_{x_1, \dots, x_r} A(x_1, \dots, x_r) &\leftrightarrow B(x_1, \dots, x_r). \end{aligned}$$

Et pour

$$\begin{aligned} R &= \in_{x_1, \dots, x_r} A(x_1, \dots, x_r) \\ y_1, \dots, y_r \in R &\Leftrightarrow A(y_1, \dots, y_r) \end{aligned}$$

Dans le cas particulier des relations binaires on écrit d'habitude :

$$x_1 R x_2 \text{ au lieu de } x_1, x_2 \in R.$$

La composition des formes propositionnelles à l'aide des particules logiques fournit certains *foncteurs* pour les relations et pour les ensembles. On aura par exemple :

$$\begin{aligned} M \cap N &= \in_x . x \in M \wedge x \in N. \\ M \cup N &= \in_x . x \in M \vee x \in N. \\ M \vdash N &= \in_x . x \in M \wedge \neg x \in N. \end{aligned}$$

L'*inclusion*, relation entre deux ensembles (ou entre deux relations) sera définie par :

$$M \subseteq N \Leftrightarrow \bigwedge_x . x \in M \rightarrow x \in N.$$

Dans les mathématiques modernes, à côté des ensembles et des relations, les applications (ou fonctions) jouent un rôle important. Bien des auteurs les définissent comme des relations particulières. Si on a, par exemple, pour une relation binaire R

$$x R y_1 \wedge x R y_2 \rightarrow y_1 = y_2,$$

on dit que R est une relation univoque à droite et, plus brièvement, que R est une *fonction*. Cette façon de faire comporte toutefois quelque chose d'artificiel. En arithmétique, par exemple, la fonction « successeur », qui prend la valeur $n + 1$ pour l'argument n , ne provient pas d'une telle relation, mais résulte immédiatement de la construction des symboles numériques $|, ||, |||, \dots$. Pour décrire cette construction, on utilise en plus des constantes $|, ||, |||, \dots$ des variables $x, y, \dots$ avec lesquelles on forme le terme $x|$. Un *terme* est une expression qui peut contenir des variables libres et qui devient une constante si on substitue des constantes à toutes ses variables libres. En logique, où on a affaire au cas particulier où les constantes sont des propositions, des formules comme $a \wedge b, a \rightarrow b$, par exemple, sont en même temps des termes. Mais en général — et c'est le cas en arithmétique — il faut soigneusement distinguer les formules, qui sont des formes propositionnelles, des termes, qui sont des formes de constantes.

On passe alors par abstraction des termes aux applications (fonctions) tout à fait comme on est passé des formules aux ensembles et aux relations.

Soient deux termes $T_1(x)$ et $T_2(x)$ dans lesquels figure la variable libre x . On définira une égalité abstraite par :

$$T_1(x) \sim T_2(x) \Leftrightarrow \wedge_x T_1(x) = T_2(x)$$

L'égalité $=$ qui figure à droite est l'égalité entre les objets pour lesquels les variables sont utilisées, de sorte que, ici encore, l'abstraction est relative à une variable. Par analogie avec $\in_x A(x)$, nous écrirons, en renversant le ι introduit par PEANO, $\iota_x T(x)$ pour désigner l'*abstractum* qu'on nomme *application*. $\iota_x T(x)$ est l'application qui, pour l'*argument* y a la *valeur* $T(y)$. Comme pour le $\in$ de la théorie des ensembles, il nous faut maintenant poser

$$f \iota y \Leftrightarrow T(y)$$

pour définir $f = \iota_x T(x)$. ι est la *fonction argumentielle* binaire qui a elle-même f et y comme arguments et qui prend la valeur $T(y)$.

Considérons des termes dans lesquels figurent plusieurs variables libres. Nous obtiendrons des *fonctions* au lieu d'applications et nous poserons :

$$\begin{aligned} \iota_{x_1, \dots, x_r} S(x_1, \dots, x_r) &= \iota_{x_1, \dots, x_r} T(x_1, \dots, x_r) \\ \Leftrightarrow \wedge_{x_1, \dots, x_r} S(x_1, \dots, x_r) &= T(x_1, \dots, x_r) \end{aligned}$$

et pour $f = \iota_{x_1, \dots, x_r} S(x_1, \dots, x_r) :$

$$f \iota y_1, \dots, y_r \Leftrightarrow S(y_1, \dots, y_r)$$

Les fonctions sont ainsi introduites comme des *abstracta* de termes et sont donc tout autre chose que des relations, lesquelles sont des *abstracta* de

formules. On peut toutefois identifier sans danger, disons les fonctions à un argument aux relations binaires univoques à droite. Cela tient à ce que toute fonction f détermine une et une seule relation de cette espèce : $R = \in_{x,y} f \text{ } x = y$.

Inversement, si on veut, à partir d'une relation R , obtenir un terme qui représente f , on utilisera un *descripteur* $\iota_y x R y$ (en mots : le y tel que $x R y$). Nous ne ferons cependant guère usage, dans ce qui suit, de la théorie de ces termes et nous nous contenterons de remarquer que $\iota_x A(x)$ a toujours un sens si :

$$\begin{aligned} & \bigvee_x A(x) \\ & A(x_1) \wedge A(x_2) \rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Donc $\iota_x A(x)$ entraîne $A(\iota_x A(x))$.

CHAPITRE II

FORMALISATION DE L'ARITHMÉTIQUE

§ 5. Arithmétique constructive et arithmétique axiomatique

En traitant au § 2 des propositions qui ne sont pas v -définies, nous n'avons pas choisi par hasard notre premier exemple en arithmétique. L'arithmétique est, en effet, la théorie dans laquelle l'infini intervient sous sa forme la plus simple. Elle n'est même en fait essentiellement que la théorie de l'infini.

L'idée d'infini surgit lorsque l'esprit conçoit une règle dont l'application répétée conduit toujours à quelque objet nouveau. La règle la plus simple qui engendre ainsi une infinité est celle pour construire les symboles numériques, les chiffres, par exemple $|$, $||$, $|||$, ... La construction part du symbole $|$ et procède selon la règle :

$$n \Rightarrow n |,$$

règle qui prescrit, pour engendrer le chiffre $n |$, d'ajouter $|$ au chiffre n préalablement construit.

On détermine l'égalité et l'inégalité des chiffres en retranchant une barre $|$ à chacun des deux chiffres à comparer et en examinant les résultats obtenus. Ou bien ce procédé se termine en même temps pour les deux chiffres, conduit à une expression « vide » et on a égalité, ou bien il ne se termine que pour un des deux chiffres et on a inégalité.

Exprimons le résultat du procédé par $m = n$ (égalité) ou par $m \neq n$ (inégalité). On peut alors le décrire comme suit :

- (1) On a $m | = n |$ ou $m | \neq n |$ selon que $m = n$ ou $m \neq n$.
- (2) On a $| = |$ mais $m | \neq |$ et $| \neq n |$ pour des chiffres (non vides) m et n .

Plus brièvement encore, on peut poser les règles suivantes qui fournissent des propositions d'égalité et d'inégalité « vraies » :

$$\begin{aligned} (5.1) \quad & | = | \\ & m = n \Rightarrow m | = n | \\ & m | \neq | \\ & | \neq n | \\ & m \neq n \Rightarrow m | \neq n | \end{aligned}$$

Ces règles n'ont naturellement aucune valeur pratique pour comparer des chiffres, puisque elles présupposent qu'on substitue toujours des chiffres égaux à la même variable, disons m . Elles n'offrent que l'intérêt théorique de caractériser rigoureusement le procédé de comparaison. Elles pourront donc servir de « définition » de l'égalité et de l'inégalité et permettront alors de fonder divers théorèmes concernant ces relations.

On appelle *définitions inductives* les définitions de cette espèce, définitions que nous rencontrons ici pour la première fois. Elles se composent d'un système de règles pour obtenir (pour dériver) des expressions qui sont ici de la forme $m = n$ et $m \neq n$ respectivement. On peut à bon droit parler de « définition » puisque ce système de règles confère un sens d -défini à toute proposition $m = n$ ou $m \neq n$. Quiconque affirme, par exemple, $||| \neq ||||$ devra, si son opposant l'exige, fournir une dérivation de cette expression à partir des règles (5.1).

Les opérations comme l'addition et la multiplication peuvent aussi s'introduire à l'aide de définitions inductives, de sorte que toute proposition de la forme $m + n = p$ ou $m \cdot n = p$ prennent un sens d -défini.

Le procédé de l'*addition* est défini par le système :

$$(5.2) \quad \begin{aligned} m + | &= m | \\ m + n = p &\Rightarrow m + n | = p | \end{aligned}$$

et celui de la *multiplication* par :

$$(5.3) \quad \begin{aligned} | \cdot n &= n \\ m \cdot n = p, p + n = q &\Rightarrow m | \cdot n = q \end{aligned}$$

Il s'agit-là de systèmes de règles qui permettent de dériver des propositions de la forme $m + n = p$ et $m \cdot n = p$. Dire que de telles propositions sont valides, signifie tout simplement qu'il est possible de les déduire à l'aide de ces règles. Ce qui revient encore à dire que celui qui les soutient dans un dialogue doit pouvoir en fournir une dérivation s'il ne veut pas perdre le dialogue.

C'est par anticipation que nous avons déjà fait usage, dans les propositions sur l'addition et la multiplication, du signe d'égalité introduit en (5.1). Il serait plus correct d'écrire d'abord respectivement $(m + n)/p$ et $(m \cdot n)/q$ au lieu de $m + n = p$ et de $m \cdot n = q$. Toutefois la relation

$$(5.4) \quad \frac{m + n}{p} \wedge \frac{m + n}{q} \rightarrow p = q$$

serait valide, de sorte que cette notation a la même portée que le signe d'égalité. Enfin

$$(5.5) \quad m + n = p \wedge m + n = q \rightarrow p = q$$

découle déjà des axiomes de l'égalité (G1) du § 4.

Que signifie dans ce contexte la « validité » de (5.4) et de (5.5)? En logique effective la « vérité » ou la « validité » de propositions d -définies signifiait que le dialogue pouvait être gagné contre tout opposant. D'autre part nos propositions arithmétiques fondamentales sont maintenant p -définies. Il s'ensuit que la « validité » de la proposition (5.5) repose sur ce qu'il est toujours possible de gagner un dialogue où elle figure, en s'appuyant sur les définitions inductives des propositions fondamentales qu'elle contient et sur le sens opératoire des particules logiques.

Il ne s'agit toutefois plus ici de vérité logique, en ce sens qu'il n'est plus possible de gagner en ne considérant que la seule forme des propositions. Il s'agit de la vérité ou de la validité particulière à l'arithmétique. Le dialogue pourra se gagner en tenant compte du sens spécial des propositions fondamentales, c'est-à-dire de leurs définitions inductives. Il est facile de le voir pour (5.5). En effet, supposons que l'opposant O pose :

$$\left. \begin{array}{l} m + n = p \\ m + n = q \end{array} \right\|$$

Il devra, à la demande du proposant P , fournir une dérivation de ces deux thèses. Chacune d'elles commence (comme le montre (5.2)) par $m + | = m |$ et se poursuit en ajoutant continuellement une $|$ à gauche et à droite du signe $=$. Dans les deux cas on aura donc tout d'abord $m |$ à droite de $=$, d'où il s'ensuit qu'on aura successivement à droite les chiffres $m ||, m |||, \dots$ jusqu'à p et q respectivement. (En même temps on passe à gauche de $|$ à $||, |||, \dots$ jusqu'à n). Si le proposant commence donc la preuve demandée de $p = q$ par l'équation $m | = m |$ et qu'il la poursuive en écrivant selon (5.1) $m || = m ||, m ||| = m |||, \dots$ (tout en passant de nouveau de $|$ à $||, |||, \dots$ jusqu'à n), il arrivera sans plus à $p = q$.

Cette description d'une stratégie de gain pour (5.5) ne constitue pas une « preuve » au sens d'une dérivation de la proposition à partir de règles pré-établies. Au § 2, l'étude systématique des stratégies de gain pour la logique (effective) nous avait conduits à un calcul logique et nous avions vu que la vérité logique d'une proposition pouvait se « prouver » par une simple dérivation selon les règles du calcul. La question, essentielle pour l'ensemble

de la métamathématique, se pose alors ici déjà de savoir si l'on peut aussi construire un « calcul » pour les propositions arithmétiquement vraies, tel que la « preuve » d'une proposition se réduise à en trouver une dérivation dans le calcul.

Le théorème d'incomplétude de GÖDEL oblige à répondre négativement. Toutefois, avant de préciser et de fonder cette réponse — ce que nous ferons au chapitre III — il nous faut d'abord examiner les tentatives faites pour obtenir de tels calculs, tentatives qui remontent à DEDEKIND, PEANO et FREGE.

Comme jusqu'à FREGE la logique n'était pas explicitement introduite en mathématiques, on admettait tacitement qu'elle allait pour ainsi dire « de soi » et le problème ne se posait pas de trouver un calcul pour l'arithmétique. Par analogie avec la géométrie, il s'agissait simplement d'en trouver une axiomatisation. Pouvait-on choisir certaines propositions comme « axiomes » de telle sorte que *tous* les théorèmes arithmétiques (et naturellement eux seulement, à l'exclusion de toute proposition fausse) puissent se déduire des axiomes d'une manière purement logique? Laissons de côté l'empirisme physique contemporain. Un système d'axiomes pour la géométrie repose alors d'une façon générale sur ce que les axiomes apparaissent comme « vrais », c'est-à-dire qu'ils expriment des faits en accord avec ce que le monde concret qui nous entoure nous apprend des notions géométriques. Une axiomatique de l'arithmétique peut s'entendre de manière semblable. On admettra que « nombres » et « opérations » ont une signification connue, ce qui permettra de tenir pour vraies certaines propositions comme

$$(5.6) \quad m \mid = n \mid \rightarrow m = n$$

par exemple.

Si on se place en revanche au point de vue de l'arithmétique constructive, il n'est alors plus possible d'utiliser l'analogie avec la géométrie. En effet, la construction des chiffres et les définitions inductives de l'égalité, de l'inégalité et des opérations (compte-tenu de l'interprétation opératoire des particules logiques) déterminent déjà les conditions pour qu'une proposition soit arithmétiquement vraie : il doit exister une stratégie de gain.

On ne peut donc pas ériger sans autre en axiome une proposition comme (5.6). Il faudra s'assurer d'abord qu'il est possible, dans le rôle d'un proposant P , de gagner contre tout opposant O le dialogue suivant :

$$\begin{array}{|l} m \mid = n \mid \rightarrow m = n \end{array}$$

pour tout m et n .

La chose est facile. Si quant à lui O affirme en effet $m \mid = n \mid$, il devra en fournir une preuve, donc une dérivation à partir de (5.1). Celle-ci aura l'allure suivante :

$$\begin{array}{l} \mid = \mid \\ \mid\mid = \mid\mid \\ \dots \\ m = n \\ m \mid = n \mid \end{array}$$

Il suffit au proposant de laisser tomber la dernière ligne de cette dérivation pour avoir dérivé $m = n$.

On pourrait dire qu'ici encore on n'a pu être certain d'avoir réellement une stratégie de gain sous la main qu'en s'appuyant sur certains contenus. Mais les « contenus » ne sont rien d'autre que les opérations effectuées sur les symboles conformément aux règles posées et ils n'ont rien à voir avec une éventuelle « signification » des symboles.

Puisque nous disposons déjà du calcul logique, nous pourrions de nouveau nous demander dans quelle mesure il est nécessaire en opérant de faire usage de tels contenus et dans quelle mesure l'examen de la vérité d'une proposition ne peut se réduire à celui de certaines propositions premières, de sorte que toute autre proposition n'en serait de nouveau qu'une conséquence logique.

Le théorème d'incomplétude de GÖDEL montre que ceci n'est pas possible, en ce sens que l'application du calcul logique à un système d'axiomes (énumérable, cf. § 8) ne saurait fournir toutes les propositions arithmétiques vraies. Toutefois, en un sens plus large de « conséquence logique », on peut donner un système d'axiomes *complet* pour l'arithmétique.

Un tel système d'axiomes n'est pas univoquement déterminé et divers systèmes sont possibles qui, en principe, sont équivalents, comme c'est d'ailleurs aussi le cas en géométrie. Le système le plus usité remonte à DEDEKIND et à PEANO. On le formule la plupart du temps pour les nombres naturels 0, 1, 2, ... (Contrairement aux entiers positifs, les nombres naturels comprennent donc 0.)

Nous utiliserons les lettres $x, y, \dots$ comme variables syntaxiques pour les variables d'objet de la théorie axiomatique à construire. Il nous faut tout d'abord introduire les *termes primitifs* qui, en plus de ces variables, comprennent encore 0 et x' . Les *termes* $s, t, \dots$ sont alors :

- (1) Les termes primitifs.
- (2) $s(t)$, si $s(x)$ et t sont des termes.

Il s'ensuit que les termes sont $0, 0', 0'', \dots$ et $x, x', x'', \dots$. Remarquons que x est mis ici pour une variable d'objet quelconque et que peu importe les symboles qu'on utilise comme variable d'objet.

Comme axiomes pour l'égalité, nous poserons en plus des axiomes généraux

$$(5.7) \quad \begin{aligned} x &= x \\ x = y \wedge A(x) &\rightarrow A(y) \end{aligned}$$

les deux axiomes suivants :

$$(5.8) \quad \begin{aligned} \neg x' &= 0 \\ x' = y' &\rightarrow x = y \end{aligned}$$

En limitant l'interprétation des variables aux seuls chiffres et en définissant inductivement l'égalité comme en (5.1) par

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \\ x = y &\Rightarrow x' = y' \end{aligned}$$

les propositions (5.8) sont arithmétiquement vraies et on peut donc les soutenir contre tout opposant. En effet, pour contester $\neg x' = 0$, l'opposant devrait pouvoir prouver $x' = 0$, ce qui est manifestement impossible. On traitera de façon semblable la proposition $x' = y' \rightarrow x = y$ en utilisant (5.6).

Pour axiomatiser les opérations, nous allons élargir la classe des termes en y introduisant de nouveaux termes primitifs $(x + y)$ et $(x \cdot y)$. Ainsi, par exemple, $(0''' + 0'') \cdot 0'$ et $x'' \cdot y + 0''''$ sont des termes. (On a économisé les parenthèses de la façon habituelle.)

Dans ce qui suit nous utiliserons $m, n, \dots$ comme variables pour les chiffres $0, 0' \cdot 0'', \dots$.

Comme axiomes nouveaux pour les opérations, nous prendrons :

$$(5.9) \quad \begin{aligned} x + 0 &= x \\ x + y' &= (x + y)' \\ 0 \cdot y &= 0 \\ x' \cdot y &= x \cdot y + y \end{aligned}$$

Il ne s'agit au fond que d'une autre façon de formuler les définitions inductives (5.2) et (5.3), en faisant usage des termes et en les étendant aux nombres naturels. Ces axiomes permettent de déduire logiquement toutes les propositions arithmétiquement vraies de la forme $m = n$, $m + n = p$ et $m \cdot n = p$. On n'y fait d'ailleurs guère usage de la logique proprement dite.

Il suffit toujours de remplacer dans les axiomes les variables par des termes convenables, pour passer de deux équations $x = y$ et $A(x)$ à une nouvelle équation $A(y)$. Ainsi par exemple :

$$\begin{array}{rcl}
 0'' \div 0 = 0'' & & \text{Axiome} \\
 0'' + 0' = (0'' + 0)' & & \text{Axiome} \\
 \hline
 0'' + 0' = 0''' & & \\
 0'' + 0'' = (0'' + 0')' & & \text{Axiome} \\
 \hline
 0'' + 0'' = 0'''' & &
 \end{array}$$

Si on s'appuie un peu plus sur la logique, on pourra obtenir aussi toutes les inégalités vraies $m \neq n$ sous la forme $\neg m = n$. Il découle en effet des axiomes d'égalité (§ 4) que :

$$x = y \rightarrow y = x.$$

D'où il vient par la contraposition en logique effective :

$$\neg y = x \rightarrow \neg x = y,$$

soit, en vertu de l'axiome $\neg y' = 0$:

$$\neg 0 = y'.$$

A partir de l'axiome $x' = y' \rightarrow x = y$, on tire par contraposition :

$$\neg x = y \rightarrow \neg x' = y'$$

et on a obtenu les règles (5.1) des définitions inductives de l'inégalité, formulées d'ailleurs ici en termes de conditionnelles. D'une façon un peu plus générale, on obtiendra aussi toutes les propositions vraies de la forme $s = t$ (respectivement $s \neq t$) pour des termes constants s et t , à partir d'équations convenables $s = m$, $t = n$ et $m = n$ (respectivement $m \neq n$).

Ces propositions primitives sont p -définies. La propriété d'être p -défini se conserve dans des compositions qui ne comportent que les seules particules logiques $\wedge$, $\vee$, $\forall_x$.

Il est encore possible de dériver logiquement, à partir des axiomes précédents, une proposition comme par exemple :

$$\forall_x 0'' \div x = 0'''' \vee \forall_y 0'''' + y = 0''$$

Les déductions logiques à utiliser y prennent, en vertu du sens p -défini des particules logiques, la forme simple :

$$\frac{\frac{A}{B}}{A \wedge B}$$

et

$$\frac{\frac{A}{A \vee B} \quad \frac{B}{A \vee B}}{\frac{A(n)}{\vee_x A(x)}}$$

La situation est essentiellement différente dès que, en plus du quantificateur existentiel $\vee_x$, on introduit dans les compositions le quantificateur universel $\wedge_x$. Considérons, par exemple, la proposition arithmétique

$$\wedge_x x \cdot 0 = 0$$

dont on sait qu'elle est vraie. Pour la soutenir dans un dialogue, il faudra pouvoir prouver la proposition $m \cdot 0 = 0$, pour tout chiffre m que l'opposant pourra choisir. Mais on ne dispose que de l'axiome $0 \cdot x = 0$ et on n'a évidemment pas encore la loi générale de commutativité $x \cdot y = y \cdot x$. Comment dans ces conditions parvenir à une stratégie de gain ?

Si l'opposant choisit $m = 0$, il faut gagner $0 \cdot 0 = 0$ par une substitution dans $0 \cdot x = 0$. S'il choisit $m = 0'$, on pourra raisonner ainsi :

$$0' \cdot 0 = 0 \cdot 0 + 0 = 0 + 0 = 0$$

(Nous avons utilisé une écriture abrégée.) Pour $m = 0''$, on aura de manière analogue :

$$0'' \cdot 0 = 0' \cdot 0 + 0 = 0 + 0 = 0$$

expression dans laquelle on utilise le résultat antérieur $0' \cdot 0 = 0$. Cet échantillon fait voir que, quel que soit le chiffre m que choisisse l'opposant, on peut construire une preuve de $m \cdot 0 = 0$. Contrairement à ce qui se passe en logique en effet — et c'est aussi totalement différent en géométrie — on sait ici que, si l'opposant attaque une universelle $\wedge_x A(x)$, il n'a le droit de choisir pour x qu'un des chiffres $0, 0', 0'', \dots$, donc qu'une expression qui peut s'obtenir par les règles :

- (1) 0
- (2) $n \Rightarrow n'$.

Tirant alors profit de cette situation, qui en arithmétique vient s'ajouter au

caractère opératoire du quantificateur universel, on peut s'assurer qu'il suffit, pour défendre $\bigwedge_x A(x)$

- (1) d'avoir une preuve de $A(0)$,
- (2) d'être capable de construire une preuve de $A(n')$ à partir d'une preuve de $A(n)$.

Il est vrai que la proposition (2) porte sur tous les n . Mais quelques uns des axiomes sont eux aussi déjà des propositions universelles.

Considérons par exemple l'universelle $\bigwedge_x x \cdot 0 = 0$.

- (1) $0 \cdot 0 = 0$ est un axiome et il s'ensuit sans plus que
- (2) $n' \cdot 0 = 0$, ceci en vertu de l'axiome

$$x' \cdot 0 = x \cdot 0 + 0 = x \cdot 0$$

et de $n \cdot 0 = 0$.

Les conditions suffisantes, données pour défendre une universelle $\bigwedge_x A(x)$, sont bien entendu aussi nécessaires : c'est pour tout n qu'il faut pouvoir fournir une preuve de $A(n)$.

La situation se complique un peu lorsque on admet que les quantificateurs universels peuvent servir aussi à composer des universelles $\bigwedge_x A(x)$ dans lesquelles les propositions $A(n)$ elles-mêmes contiennent des quantificateurs universels. Elles peuvent ainsi n'être plus p -définies. Il faudra alors, dans les conditions (1) et (2), parler plus généralement de « stratégie de gain » au lieu de « preuve ». Ce qui précède montre bien que les conditions qui permettent de défendre $\bigwedge_x A(x)$ ne sont pas adéquatement exprimées par un « axiome d'induction » du genre de celui qui figure dans l'axiomatisation de l'arithmétique de DEDEKIND-PEANO :

$$(5.10) \quad A(0) \wedge \bigwedge_x . A(x) \rightarrow A(x') \rightarrow \bigwedge_y A(y)$$

Nous ne pouvons pas limiter en effet dans cet axiome les propositions $A(x)$ à la « langue d'objet », c'est-à-dire ici aux formules qui peuvent se construire à partir des seules formules primitives $s = t$ à l'aide des particules logiques. En revanche il va de soi que l'axiome d'induction est une proposition arithmétiquement vraie. Pour toute forme propositionnelle d -définie $A(x)$, il est aisé de fournir une stratégie de gain pour défendre (5.10). Si l'opposant O conteste la thèse, il doit lui-même assumer les prémisses, d'où résulte la situation suivante :

$$\begin{array}{c} A(0) \\ \bigwedge_x . A(x) \rightarrow A(x') \end{array} \parallel \bigwedge_y (Ay)$$

O doit alors contester la thèse du propositant P en fournissant un chiffre n :

$$? n \quad ||$$

et P doit justifier $A(n)$. Il peut toutefois obliger d'abord O à soutenir lui-même $A(n)$. Il lui suffit alors d'attaquer la thèse universelle de O de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} & & ? 0 \\ A(0) \rightarrow A(0') & || & A(0) \\ & & ? 0' \\ A(0') \rightarrow A(0'') & || & A(0') \\ & & ? 0'' \\ & & A(0'') \\ & || & \\ \dots & & \dots \end{array}$$

et il continue ainsi jusqu'à ce que O soit arrivé à $A(n)$.

Nous avons donc prouvé que l'axiome d'induction est arithmétiquement vrai au sens de l'arithmétique constructive et on voit qu'il n'est pas nécessaire, dans cette preuve, de restreindre la forme propositionnelle $A(x)$ à une langue déterminée.

Finalement il est encore possible de prouver constructivement par cette induction les axiomes d'égalité (5.7). La preuve par induction de $x = x$ est triviale. L'axiome $x = y \wedge A(x) \rightarrow A(y)$ dit que les formules arithmétiques, composées logiquement à partir des formules primitives $s = t$, sont compatibles avec $=$, ainsi qu'il est requis par la théorie logique de l'égalité.

Il suffit de prouver la compatibilité des formules atomiques. (Voir à ce propos au § 7, la dérivation de l'axiome d'égalité qui est aussi valide de point de vue constructif). La compatibilité pour les formules atomiques $x = y$ et pour les termes primitifs x' s'obtient simplement par :

$$\begin{array}{l} x = y \wedge x = z \rightarrow y = z \\ x = y \wedge x' = z \rightarrow y' = z \end{array}$$

Les inductions (triples) nécessaires sont un peu fastidieuses et nous les laisserons de côté.

Remplaçons les termes primitifs $x + y$, $x \cdot y$ par des descripteurs (cf. § 4). Il ne restera plus alors qu'à montrer par induction la compatibilité des formules atomiques $x + y = z$ et $x \cdot y = z$. Nous laisserons aussi ceci de côté.

La preuve pour les « axiomes » est de nature constructive, aussi allons-nous nous poser la question de leur éventuel caractère complet.

Si, dans (5.10), le symbole $A(x)$ ne connaît aucune restriction, il est facile de prouver une certaine « complétude » du système d'axiomes (5.7)-(5.10) — dit simplement *système de Peano* — de la façon suivante. Tout modèle (voir à ce sujet le § 13) du système est isomorphe au modèle des nombres naturels, ce qui signifie d'une manière générale que tous les modèles du système sont isomorphes entre eux. Pour éviter le terme de « complétude », on appellera *monomorphie* cette propriété du système de Peano.

Il suffit pour en avoir une preuve de fournir, pour un modèle quelconque $\mathfrak{M}$ (nous l'imaginerons défini d'une certaine façon au sein des mathématiques constructives), un isomorphisme avec le modèle $\mathfrak{N}$ des nombres naturels. Supposons qu'on dispose en $\mathfrak{M}$ d'un élément v et de fonctions $*$, $\oplus$ et $\odot$, tels que les axiomes (5.7)-(5.10) deviennent des propositions relatives à $\mathfrak{M}$ lorsqu'on y remplace respectivement $'$, $+$ et $\cdot$ par $*$, $\oplus$ et $\odot$. Nous définirons alors par induction une application f des nombres naturels dans $\mathfrak{M}$:

$$\begin{aligned} f \, 0 &= v \\ f \, n' &= (f \, n)^* \end{aligned}$$

Il serait aussi possible de formuler cette définition inductive de f , c'est-à-dire de la formule $f \, n = x$ (x variable pour les éléments de $\mathfrak{M}$) à l'aide des règles :

$$\begin{aligned} f \, 0 &= v \\ f \, n &= x \Rightarrow f \, n' = x^* \end{aligned}$$

Il reste à prouver que cette application f est un isomorphisme entre $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$, ce qui est facile à l'aide de l'axiome d'induction. Il n'est pas nécessaire d'en donner le détail. Ce qui est en revanche important pour nous c'est que l'application f , qui n'appartient pas à la langue d'objet de l'arithmétique, est encore utilisable pour les propositions $\bigwedge_x A(x)$ qui, dans la preuve d'isomorphisme, exigent le recours à l'axiome d'induction. En fait, ainsi que SKOLEM l'a pour la première fois montré (1938), la monomorphie ne tient plus si, dans l'axiome d'induction (5.10), on restreint les formes propositionnelles $A(x)$ à la langue d'objet. Ce théorème de SKOLEM peut se déduire de celui d'incomplétude de GÖDEL (Cf. § 15).

Nous appellerons *système restreint de Peano* le système d'axiomes (5.7)-(5.10) où les formules $A(x)$ sont restreintes à la langue d'objet.

Seul système de Peano encore plus restreint — la restriction des formules $A(x)$ est encore étendue à l'axiome d'égalité — conduit, en liaison avec le calcul logique, à une formalisation de l'arithmétique. On ne peut, sans

restreindre les formules, ramener la preuve des propositions à une simple dérivation.

Avant d'étudier le caractère complet, qui comme nous l'avons dit n'est qu'un idéal, nous allons examiner tout d'abord un autre problème important pour le système de Peano au sens restreint. Il s'agit en effet de savoir si, lorsqu'on ajoute le calcul *classique* au système de Peano, on ne peut pas dériver essentiellement beaucoup trop de propositions. Le calcul logique résulte en effet d'une extension à première vue arbitraire de certaines propriétés de symétrie de la logique des joncteurs aux quantificateurs. Or nous avons précisément affaire à l'arithmétique à une infinité d'objets. D'où le problème de justifier l'usage de la logique classique en arithmétique.

Il ne saurait évidemment être question que toutes les propositions à déduire classiquement du système restreint de Peano soient effectivement vraies, donc toujours soutenables dans un dialogue. On pourra néanmoins exiger au moins de l'application de la logique classique qu'on ne puisse dériver A et $\neg A$ pour aucune proposition A . C'est là la condition la plus faible pour la consistance (absolue) et nous nous en occuperons au paragraphe suivant. GÖDEL (1936) a été le premier à la prouver pour la logique classique. La preuve que nous en donnerons au § 7 sera essentiellement plus simple parce que nous y ferons usage de l'interprétation opératoire du quantificateur universel.

§ 6. Formalisation de l'arithmétique classique

Nous avons appris à connaître la logique classique des quantificateurs au § 3 et le système d'axiomes de PEANO pour l'arithmétique au § 5. Nous allons prendre pour formaliser l'arithmétique classique une combinaison du système de Peano restreint et du calcul classique des quantificateurs.

Nous avons construit un calcul pour la logique classique à partir d'implications. Une implication $A < B$ y signifiait que B était vraie pour des raisons logiques chaque fois que A était vraie. D'autre part, le système de Peano se compose de propositions qui doivent être vraies pour l'arithmétique, ce qui permet même de dire, sur la base de l'arithmétique constructive et de la logique effective, qu'elles *sont* vraies. Réunissons les deux points de vue et nous obtiendrons de nouvelles propositions arithmétiquement vraies que nous considérerons comme des implications logiques $A < B$. Si, dans ces implications, A est une conjonction d'axiomes, B est automatiquement arithmétiquement vraie.

Pour nous écarter le moins possible dans notre formalisation de l'arithmétique du calcul classique des quantificateurs dont nous disposons déjà,

nous introduirons à côté des propositions arithmétiquement vraies des implications arithmétiques. Nous les noterons encore tout simplement par le signe $<$ et nous les définirons sans plus :

- (1) pour tout axiome C du système restreint de Peano, on pose $\forall < C$;
- (2) quelles que soient les formules A et B , on pose $A < B$ si A implique logiquement B ;
- (3) on pose aussi $A < B$, si pour une certaine formule C , $A < C$ et $C < B$.

Si en particulier dans (3) on remplace A par $\forall$, cette définition exprime (1) que les axiomes de Peano doivent être arithmétiquement vrais et (2)-(3) que sont vraies toutes les formules classiquement I -impliquées par une quelconque formule arithmétiquement vraie.

Jusqu'ici notre définition de l'implication classique n'entraîne pas que la relation d'implication logique soit transitive, comme le veut (3). Cette transitivité ne sera assurée que par la preuve de consistance du paragraphe suivant. Nous l'admettrons toutefois ici pour donner un sens à la vérité arithmétique.

La transitivité de l'implication ne va pas non plus de soi pour la logique effective, mais on pourrait facilement l'établir à partir du § 7, ce à quoi cependant nous renonçons.

Les axiomes de Peano et la logique classique des quantificateurs fournissent à eux deux un calcul pour dériver les implications arithmétiques. Nous allons, une fois encore, le décrire dans son ensemble.

Les implications se composent des symboles atomiques suivants :

Variables $x, y, \dots$

$0, ', (,), +, \cdot, =, \wedge, \vee, \neg, \forall, \exists, \forall, \wedge, <.$

Les *termes primitifs* sont :

les variables $x, y, \dots$

0

x'

$(x + y)$

$(x \cdot y)$

Les *termes* $s, t, \dots$ sont formés à partir des termes primitifs ou à partir de termes déjà construits.

A partir des termes, on forme ensuite les *formules atomiques* $a, b, c, \dots$ de la forme :

$(s = t), y$ compris $\forall$ et $\wedge$,

qui sont à leur tour composées en formules $A, B, C, \dots$ de la façon suivante :

$$(A \wedge B), (A \vee B), \neg A, \wedge_x A(x), \vee_x A(x)$$

Enfin on composera à partir de ces formules des *formules conjonctives* $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_m$ et des *formules adjonctives* $B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_n$. (On ne tiendra compte ni des associations ni de l'ordre des termes.) Toute formule conjonctive F et toute formule adjonctive G donnent donc lieu aux implications $F < G$.

Ce qui précède permet de définir inductivement comme « dérivables » les implications suivantes :

- (6.1) $\forall < s = s$
- (6.2) $s = t \wedge A(s) < A(t)$
- (6.3) $s' = t' < s = t$
- (6.4) $s' = 0 < \wedge$
- (6.5) $\forall < s \div 0 = s$
- (6.6) $\forall < s \div t' = (s \div t)'$
- (6.7) $\forall < 0 \cdot t = 0$
- (6.8) $\forall < s' \cdot t = s \cdot t + t$
- (6.9) $A(0) \wedge \wedge_x (\neg A(x) \vee A(x')) < A(t)$
- (6.10) $F \wedge c < c \vee G$
- (6.11) $F \wedge \wedge < G$
- (6.12) $F < \forall \vee G$
- (6.13) $F < A \vee G, F < B \vee G \Rightarrow F < (A \wedge B) \vee G$
- (6.14) $F \wedge A < G, F \wedge B < G \Rightarrow F \wedge (A \vee B) < G$
- (6.15) $F \wedge C < G \Rightarrow F < \neg C \vee G$
- (6.16) $F < C \vee G \Rightarrow F \wedge \neg C < G$
- (6.17) $F < B(y) \vee G \Rightarrow F < \wedge_x B(x) \vee G$
- (6.18) $F \wedge \wedge_x A(x) \wedge A(t) < G \Rightarrow F \wedge \wedge_x A(x) < G$
- (6.19) $F \wedge A(y) < G \Rightarrow F \wedge \vee_x A(x) < G$
- (6.20) $F < B(t) \vee \vee_x B(x) \vee G \Rightarrow F < \vee_x B(x) \vee G$
- (6.21) $A < C, C < B \Rightarrow A < B$

Remarques : Dans (6.17) et dans (6.19), il faut introduire une condition sur les variables : la variable y ne peut figurer libre dans l'implication à droite

de $\Rightarrow$. De plus, dans toutes les règles (6.17)-(6.20) sur les quantificateurs, il faut prendre garde à ce qui suit. On y trouve les formules $A(x)$ et $B(x)$ qui sont quantifiées et la variable libre x doit y être remplacée par une variable y ou par un terme t . Le résultat de la substitution est noté respectivement $A(y)$, $A(t)$ et $B(y)$, $B(t)$. Tant qu'on remplace la variable libre par des termes constants, aucune précaution supplémentaire n'est requise. Mais si on substitue un terme non constant t , il faut alors prendre garde que, après la substitution, les variables libres de t ne soient pas liées dans $A(x)$. Pour pouvoir conclure par exemple à

$$\forall x \wedge y B(x, y),$$

il ne suffit pas en effet d'avoir l'implication

$$\forall y \wedge y B(y, y)$$

Il faudrait avoir

$$\forall x \wedge y B(x, y)$$

avec une variable libre x . Si dans $\wedge y B(x, y)$ on remplaçait x par y , le y introduit serait lié. Nous dirons que la variable x n'est pas libre pour (la substitution) y dans $\wedge y B(x, y)$. D'une façon générale on dit qu'une variable x est *libre pour* un terme t dans $A(x)$, si aucune des variables libres de t n'est liée ensuite de la substitution dans $A(x)$. Il faut alors ajouter aux règles (6.17)-(6.20) la condition que la variable x dans $A(x)$ et $B(x)$ soit libre pour y et respectivement pour t .

Nous appellerons simplement cette formalisation de l'arithmétique le *formalisme de Peano*.

Avant de passer à la preuve de la consistance de ce formalisme, il nous faut encore nous occuper du théorème de la déduction. Supposons qu'on ait, pour des propositions quelconques $A_1, \dots, A_n$ et A , une dérivation relative de l'implication $\forall x A$ à partir des implications $\forall x A_1, \dots, \forall x A_n$. Nous prétendons alors que l'implication $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow A$ est dérivable au sens absolu. Pour le prouver il suffit — par analogie avec la preuve donnée au § 2 — de montrer que toute dérivation relative redonne une dérivation relative, si on y remplace toutes les implications de la forme $B_1 \rightarrow B_2$ qui y figurent par $F \wedge B_1 \rightarrow B_2$, où F est une proposition arbitraire sans variable libre. Prenons pour F la formule $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$. On a bien alors une dérivation relative de $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow A$ à partir de $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow A_1, \dots$, et il est facile de s'assurer que ces implications peuvent être dérivées au sens absolu à partir de (6.10)-(6.20). Reste à montrer qu'on peut ajouter F dans n'importe quelle dérivation relative. Pour les axiomes, il suffit de constater que si

$B_1 < B_2$ est un axiome, $F \wedge B_1 < B_2$ est dérivable absolument, puisque il l'est à partir de $F \wedge B_1 < B_1$ et de $B_1 < B_2$ par (6.21). Pour les règles (6.13)-(6.20) l'adjonction d'une proposition F est triviale. Il reste enfin la règle de transitivité (6.21) pour laquelle il faut montrer que $F \wedge A < B$ est aussi dérivable de $F \wedge A < C$ et de $F \wedge C < B$. Mais $F \wedge A < F \wedge C$ est sans plus dérivable de $F \wedge A < C$ grâce à la dérivabilité absolue de $F \wedge A < F$. Avec $F \wedge C < B$ cela conduit par (6.21) à $F \wedge A < B$ et le théorème de la déduction est ainsi prouvé.

Dire que le formalisme de Peano est consistant signifie qu'il ne contient aucune formule C telle que $\forall < C$ et $\forall < \neg C$ y soient simultanément dérivables. En logique classique on passe immédiatement de $\forall < \neg C$ à $C < \wedge$ et, par (6.21), on obtient $\forall < \wedge$ à partir de $\forall < C$ et de $C < \wedge$. Enfin, en vertu des implications fondamentales $A < \forall$ et $\wedge < B$, on a $A < B$ pour tout couple de formules A et B . Il suffit donc, pour s'assurer de la consistance, de montrer qu'il existe dans le formalisme de Peano au moins une implication non dérivable.

Autant il est aujourd'hui facile de dire ce qu'il faut faire pour prouver la consistance de l'arithmétique, autant il a été pendant longtemps extraordinairement difficile de le faire. La raison de cette difficulté a été mise en évidence en 1931 par GÖDEL en liaison avec son théorème d'incomplétude (Cf. § 12). On est allé jusqu'à croire qu'une preuve de consistance était même impossible, de sorte que celle fournie en 1936 par GENTZEN se heurta à une large incompréhension.

Dans ce qui suit, l'idée-clé qui nous servira à prouver la consistance consiste à comparer le formalisme de Peano à une autre formalisation de l'arithmétique, celle-la trivialement consistante, mais dont on peut toutefois montrer qu'y sont dérivables toutes les implications dérivables du formalisme de Peano. Cette nouvelle formalisation se distingue du formalisme de Peano par cette propriété caractéristique qu'elle ne procède pas seulement par des règles finies, c'est-à-dire des règles qui comptent un nombre fini de prémisses, mais qu'elle contient une règle infinie, savoir l'induction infinie :

$$I(0), I(0'), I(0''), \dots \Rightarrow I(x)$$

Ici $I(x)$ est une implication quelconque de la forme $A(x) < B(x)$ et $I(n)$ désigne l'implication $A(n) < B(n)$.

Cette induction infinie signifie naturellement qu'on utilise dans la métalangue un quantificateur universel — nous le noterons $\forall_n$ (pour tout n) — tel que :

$$\forall_n I(n) \Rightarrow I(x)$$

L'application d'un tel quantificateur universel dans une définition inductive (la classe des implications « dérivables » est en effet définie) a-t-elle un sens *d-défini*? Pour répondre à cette question, il nous faut d'abord donner les autres règles (finies) de la nouvelle formalisation.

Nous emprunterons au formalisme de Peano la définition des termes, des formules et des implications. En nous appuyant sur l'arithmétique constructive (ou, si l'on préfère, en partant seulement des axiomes de PEANO (5.9) et des axiomes d'égalité), nous pouvons partager de façon effective en « vraies » et « fausses » les propositions atomiques, c'est-à-dire les formules $s = t$, où s et t sont des termes constants, y compris $\vee$ et $\wedge$ · $\vee$ compte naturellement comme vrai et $\wedge$ comme faux. Nos seules implications fondamentales seront :

$$(6.22) \quad F \wedge a < b \vee G$$

dans lesquelles a est une proposition atomique fausse ou b une proposition atomique vraie. Ces implications (6.22) remplaceront toutes les implications fondamentales (6.1)-(6.12) du formalisme de Peano.

Les règles logiques (6.13)-(6.20) du formalisme de Peano seront reprises sans modification. En revanche, nous laisserons de côté la règle de transitivité (6.21) et nous introduirons à sa place l'induction infinie :

$$(6.23) \quad \neg_n A(n) < B(n) \Rightarrow A(x) < B(x)$$

Comme on utilise souvent le terme « formalisme » dans le sens où nous avons employé le mot « calcul », c'est-à-dire pour des systèmes qui n'ont que des règles finies, nous appellerons en suivant SCHÜTTE (1960) notre nouveau système de règles un *semi-formalisme*. Le formalisme de Peano sera alors plus précisément un *formalisme complet*.

Notre semi-formalisme se compose donc du calcul classique des quantificateurs auquel sont jointes les implications arithmétiques fondamentales (6.22) et l'induction infinie (6.23). Si on remplaçait ici le calcul classique des quantificateurs par le calcul effectif — et les implications (6.22) se réduiraient alors aux implications fondamentales de la forme $F \wedge a < b$ — le semi formalisme qui en résulterait ne se distinguerait pratiquement pas de l'arithmétique constructive (à condition de s'y limiter à l'addition et à la multiplication.) Aux propositions atomiques s'ajouteraient encore leurs conséquences logiques effectives et, en vertu de l'induction infinie, les variables x prendraient pour valeurs les chiffres 0, 0', 0'', ... et eux *seulement*.

La situation se présente différemment pour la logique classique des quantificateurs où on ne dispose d'aucune interprétation pour les particules logiques. Seules sont données les règles du semi-formalisme auxquelles il faut se tenir. Dès lors, supposons que la dérivation d'une implication soit affirmée au

cours d'un dialogue. Que doit faire alors le proponent P pour gagner ? L'opposant O ne saurait, comme dans un formalisme complet, exiger de lui qu'il écrive une dérivation. L'éventuel recours à l'induction infinie rend la chose impossible. En conséquence la dérivabilité dans un semi-formalisme n'est pas p -définie. En revanche elle est d -définie, à condition de comprendre le dialogue comme suit. Si O conteste la dérivation d'une implication I_0 , P doit indiquer par quelle règle du semi-formalisme il est parvenu à la conclusion I_0 . Si cette règle a plusieurs prémisses (éventuellement une infinité), O a le droit de choisir celles que P doit s'attacher à défendre. P peut poursuivre le dialogue de cette façon jusqu'à ce qu'il n'ait plus qu'une implication fondamentale à défendre.

Nous allons éclairer ce procédé par un exemple simple, disons par l'implication :

$$x' = y' < x = y$$

P signalera que cette implication doit être dérivée en utilisant une induction infinie sur x . O doit alors choisir un chiffre m pour x et P doit défendre la thèse $m' = y' < m = y$. Il en appellera de nouveau à l'induction infinie, mais maintenant sur y . Supposons que O choisisse le chiffre n . P doit alors défendre l'implication $m' = n' < m = n$. Si le choix de O est tel que $m = n$ est vraie, on a une implication fondamentale. Si son choix est tel que $m \neq n$ est vraie, $m' = n'$ est fausse et on a de nouveau une implication fondamentale. Pour avoir la certitude de toujours pouvoir gagner par cette stratégie, P doit naturellement avoir admis de fonder l'axiome de Peano $x' = y' < x = y$ au sein de l'arithmétique constructive.

Dans les cas plus compliqués, il y a une difficulté qui tient à ce que la longueur du dialogue peut dépendre des choix de O . Un contexte défavorable peut conduire à la situation suivante :

O craint que P n'arrive finalement pas à terminer le dialogue, qu'il ne parvienne donc jamais — avec les choix que fait O — à une implication fondamentale. D'autre part P soutient, pour ainsi dire en marge du jeu officiel, qu'il parviendra « bientôt » à terminer et à gagner. O est-il obligé d'accepter une telle garantie ? La seule solution est que les partenaires se mettent d'accord entre eux — et de préférence avant de jouer ! Si O ne veut pas se laisser entraîner à un jeu d'une durée indéterminée, il peut proposer de renforcer les règles du jeu. Chaque fois que P posera une implication, il indiquera un « nombre de pas » maximum avec lequel il s'engage à terminer le dialogue. Si O a choisi une prémisses dans une des règles citée par P , P devra soutenir cette prémisses en un nombre de pas plus petit et ainsi de suite. De cette façon O a au moins une certaine idée du temps que le dialogue peut

encore durer. Si P est conduit au nombre de pas zéro sans être en même temps parvenu à une implication fondamentale, il a perdu. Il a d'ailleurs aussi perdu, s'il ne peut soutenir la dernière implication proposée sans qu'on lui accorde des pas supplémentaires.

Cette suggestion de renforcer les exigences du dialogue à l'aide du nombre des pas laisse encore une question pendante, à savoir ce qu'on peut accorder comme nombre. Il se peut très bien que, pour des quantificateurs imbriqués les uns dans les autres, on ne puisse se tirer d'affaire en comptant les pas avec les nombres naturels. Il faut en conséquence admettre aussi ce qu'on appelle les nombres ordinaux transfinis, comme $\omega, \omega + \omega, \omega^\omega, \dots$. On n'acceptera naturellement que les nombres ordinaux qu'on peut atteindre au sein des mathématiques constructives. Il est vrai qu'ainsi la classe des ordinaux « constructifs » est finalement aussi peu déterminée que les mathématiques constructives elles-mêmes. Toutefois ce caractère ouvert ne pose aucun problème pour la consistance de l'arithmétique classique. La preuve de GENTZEN montre qu'on se tire d'affaire pour toute implication dérivable dans le formalisme de Peano en prenant, pour nombre de pas de la dérivation

dans le semi-formalisme, un ordinal inférieur à $\epsilon_0 = \omega^{\omega^{\omega^{\dots}}}$. On peut voir d'autre part — en liaison de nouveau avec le théorème d'incomplétude de GÖDEL — qu'à tout ordinal défini récursivement et auquel on veut se tenir pour compter les pas, correspondent des implications qui sont bien dérivables, mais non avec ce nombre de pas-là.

Nous renoncerons donc à renforcer le semi-formalisme en fixant le nombre de pas et nous montrerons tout d'abord en quel sens il s'agit d'une semi-formalisation « complète » de l'arithmétique classique.

Rappelons d'abord le caractère complet de la logique classique des joncteurs du § 3. Nous avons établi que toute implication (classique) logiquement valide entre des formules de la logique des joncteurs était dérivable. Nous allons transposer sous une forme convenable cette complétude au semi-formalisme de l'arithmétique. Il nous faut pour cela définir ce que doit être une implication arithmétiquement valide. Nous y parviendrons en étendant d'abord les prédicats « vrai » et « faux » à des propositions arithmétiques quelconques (c'est-à-dire à des formules sans variable libre) par la définition inductive suivante :

(1) Pour les propositions atomiques, rien de changé.

(2) A vraie, B vraie	$\Rightarrow$	$A \wedge B$	vraie
A fausse	$\Rightarrow$	$A \wedge B$	fausse
B fausse	$\Rightarrow$	$A \wedge B$	fausse

- | | | | | |
|-----|---------------------------|---------------|--------------------|--------|
| (3) | A vraie | $\Rightarrow$ | $A \vee B$ | vraie |
| | B vraie | $\Rightarrow$ | $A \vee B$ | vraie |
| | A fausse,, B fausse | $\Rightarrow$ | $A \vee B$ | fausse |
| (4) | A fausse | $\Rightarrow$ | $\neg A$ | vraie |
| | A vraie | $\Rightarrow$ | $\neg A$ | fausse |
| (5) | $\bigwedge_n A(n)$ vraie | $\Rightarrow$ | $\bigwedge_x A(x)$ | vraie |
| | $A(n)$ fausse | $\Rightarrow$ | $\bigwedge_x A(x)$ | fausse |
| (6) | $A(n)$ vraie | $\Rightarrow$ | $\bigvee_x A(x)$ | vraie |
| | $\bigwedge_n A(n)$ fausse | $\Rightarrow$ | $\bigvee_x A(x)$ | fausse |

C'est-là ce qu'on appelle la *définition sémantique de la vérité* (et de la fausseté). Elle utilise aussi deux fois un quantificateur universel du méta-niveau. Il s'agit d'une définition inductive des prédicats vrai et faux. Les prédicats y sont d -définis sans qu'on ait besoin de fixer un ordinal comme nombre de pas. Si l'on passe en effet d'une proposition de la forme « A vraie » ou « A fausse » à l'une des prémisses qui sont possibles selon les règles (1) à (6), puis de nouveau à une prémisse et ainsi de suite, on arrivera toujours, après un nombre fini de pas, à la vérité ou à la fausseté de propositions atomiques. La définition sémantique de la vérité est en conséquence une définition « fondée ».

Contrairement à la manière dont on utilise cette définition en sémantique (ce qui présuppose une métalogue classique et même le plus souvent une théorie des ensembles), nous ne prétendons pas ici que la définition attribuée à chaque proposition tout juste un des prédicats « vrai » ou « faux ». Cela signifierait que nous userions en métamathématique de la logique classique au lieu de la logique effective. Nous envisageons plutôt les clauses (1) à (6) comme ne constituant qu'un semi-formalisme pour dériver des métapropositions de la forme « A vraie » et respectivement « A fausse ». Nous appellerons ce formalisme le *semi-formalisme sémantique*. Il est facile de s'assurer de façon constructive que, selon lui, aucune formule en tous cas n'est à la fois vraie et fausse. On le vérifie en effet pour les formules atomiques, de même par exemple pour $A \wedge B$, si la chose est vérifiée pour A et pour B . On traite sans plus de peine les compositions $A \vee B$, $\neg A$, $\bigwedge_x A(x)$ et $\bigvee_x A(x)$.

Pour définir les implications *valides* et *non valides*, nous compléterons le semi-formalisme sémantique en posant :

- | | | | | |
|-----|------------------------|---------------|---------|------------|
| (7) | A fausse | $\Rightarrow$ | $A < B$ | valide |
| | B vraie | $\Rightarrow$ | $A < B$ | valide |
| | A vraie,, B fausse | $\Rightarrow$ | $A < B$ | non valide |

et, pour les implications $I(x)$ avec une variable libre x :

$$(8) \quad \begin{array}{lll} \neg_n I(n) \text{ valide} & \Rightarrow & I(x) \text{ valide} \\ I(n) \text{ non valide} & \Rightarrow & I(x) \text{ non valide.} \end{array}$$

Ici encore on pourrait, à l'aide de la seule métalogue classique, montrer que toute implication est valide ou non valide. Une fois de plus on n'est seulement assuré au sens effectif de n'avoir aucune implication à la fois valide et non valide. Cela veut dire qu'on peut bien conclure de « valide » à « pas non valide » et de « non valide » à « pas valide », mais pas inversement.

La présence à côté de la validité d'une notion comme celle de « pas non valide » est caractéristique des mathématiques constructives.

Il en va de même pour la dérivabilité des implications dans notre semi-formalisme arithmétique. Celle-ci est définie par l'existence d'une stratégie de gain. Il ne suffit pas, en effet, pour les semi-formalismes d'écrire simplement une dérivation (finie). Nous n'avons pas ici de dérivation au sens des formalismes complets. Une stratégie de gain ne peut se décrire dans la langue d'objet. Il s'agit d'instructions dans la métalangue qui commencent par laisser ouverts les moyens métalinguistiques à appliquer. La classe de toutes les stratégies de gain qui sont requises pour notre preuve de consistance peut en effet — à l'aide de nombres de pas plus petits que ϵ_0 — se définir de façon constructive.

Notre but est de transporter le caractère complet de la logique classique des joncteurs au semi-formalisme arithmétique. Il nous suffira pour cela de jeter un coup d'œil sur les stratégies de gain, ce que nous ferons de la façon suivante. Soit une implication I qui doit être défendue. On peut d'abord examiner quelles sont les règles du semi-formalisme qui permettent en général d'obtenir I comme conclusion. Si I contient une variable libre, on pourra appliquer l'induction infinie. Écrivons l'implication $I(x)$. Les prémisses $I(n)$ pourront alors s'appeler les *antécédents* de $I(x)$.

Si I ne contient aucune variable libre mais, à gauche de $<$, une des particules $\neg$, $\vee$, $\bigvee$ ou à droite de $<$ une des particules $\neg$, $\wedge$, $\bigwedge$, une des règles (6.13)-(6.16), (6.17) ou (6.19) est applicable. On pourra de nouveau appeler « antécédent » de I les prémisses d'une règle qui est ainsi applicable.

Reste les implications que SCHÜTTE appelle « critiques », de la forme :

$$F \wedge \bigwedge_{x_1} A_1(x_1) \wedge \bigwedge_{x_2} A_2(x_2) \wedge \dots < \bigvee_{y_1} B_1(y_1) \vee \bigvee_{y_2} B_2(y_2) \vee \dots \vee G$$

et les implications primitives $F < G$. Dans les deux cas F et G n'ont que des propositions atomiques comme termes.

Une implication primitive est dérivable si et seulement si elle est une implication fondamentale et c'est précisément le cas lorsqu'elle est valide.

Pour une implication critique I , il est possible d'appliquer les règles (6.18) ou (6.20). On obtient alors des antécédents de I en remplaçant un terme $\wedge_x A(x)$ par $\wedge_x A(x) \wedge A(m)$ ou un terme $\vee_y B(y)$ par $\vee_y B(y) \vee B(n)$. Décidons maintenant d'appeler encore « antécédents » de l'implication critique I les implications qui en résultent par une substitution simultanée dans plusieurs termes. Pour revenir d'un tel antécédent à I elle-même, on réitère l'application des règles (6.18) et (6.20).

Une implication fondamentale ne peut avoir aucun antécédent.

Au cours d'un dialogue pour soutenir une implication I , on rencontre donc des suites d'antécédents de I . Ces suites $I_0, I_1, I_2, \dots$ commencent par $I_0 = I$ et chaque terme I_{n+1} doit être un antécédent de I_n . Nous exigerons de plus que les suites soient infinies ou qu'elles se terminent soit par une implication primitive, soit par une implication fondamentale.

La définition sémantique de « vrai et de faux » (et respectivement de « valide » et de « non valide ») en résulte immédiatement de la façon suivante. Si une implication I est valide, tous les termes d'une suite d'antécédents de I le sont aussi. Une suite finie d'antécédents d'une implication valide se termine donc par une implication fondamentale ou par une implication primitive valide, c'est-à-dire dans les deux cas par une implication fondamentale.

Nous allons construire maintenant des suites particulières d'antécédents de I et nous allons montrer que I est non valide s'il est possible de construire une telle suite particulière infinie. Si l'on souhaitait alors appliquer la logique classique à ces considérations, on pourrait « inférer » la complétude comme suit.

Si I est valide, elle n'est pas non valide et on ne peut donc construire aucune suite particulière d'antécédents, c'est-à-dire que, au sens classique, toute suite particulière d'antécédents est finie et se termine par une implication fondamentale. Donc il existe (au sens classique!) une stratégie de gain.

On ne peut évidemment, sur la base de ce qui précède, fournir effectivement aucune stratégie de gain. En effet, de ce qu'il n'existe pas de suite particulière infinie, rien ne découle quant à la longueur des suites d'antécédents. On ne peut que s'assurer qu'aucun opposant ne possède une contre-stratégie.

La construction des suites particulières d'antécédents qui conduisent à ce résultat est simple. Nous poserons ce qui suit pour la stratégie du posant:

- (1) Pour une implication $I(x)$ avec une variable libre : prendre comme antécédent une prémisses de l'induction infinie.
- (2) Pour une implication non critique I sans variable libre : prendre comme antécédent une prémisses d'une des règles (6.13) à (6.16), (6.17) ou (6.19).

- (3) Pour une implication critique I : prendre l'antécédent qui résulte de la substitution de $\bigwedge_x A(x) \wedge A(m)$ à tous les termes $\bigwedge_x A(x)$ et, en même temps, de la substitution de $\bigvee_y B(y) \vee B(n)$ à tous les termes $\bigvee_y B(y)$. Les chiffres m et n représentent ici le nombre des implications critiques qui figurent déjà comme antécédents dans I et qui contiennent $\bigwedge_x A(x)$, respectivement $\bigvee_y B(y)$, comme termes.

Une telle stratégie du proposant garantit, en fait, que les choix de l'opposant ne peuvent conduire à une suite d'antécédents infinie que dans le cas d'une implication non valide. Pour le prouver, montrons que toutes les implications d'une suite particulière infinie sont non valides. En effet, toutes les propositions qui figurent comme antécédents sont vraies et toutes celles qui figurent comme conséquents sont fausses. Cette dernière constatation est sans aucun doute valable pour les propositions atomiques, sinon l'une des implications serait une implication fondamentale et la suite des antécédents serait ainsi finie. Admettons maintenant que cela s'applique aux formules partielles d'une formule composée et montrons, par induction sur ces formules partielles, que la conclusion s'applique à la formule totale. Si, par exemple, $A \vee B$ figure comme antécédent, par construction A ou B figure dans la suite particulière des antécédents. Mais si A est vraie ou si B est vraie, $A \vee B$ l'est aussi. Si $\neg A$ figure comme antécédent, A figure comme conséquent. Donc si A est fausse, $\neg A$ est vraie.

Si $\bigvee_x A(x)$ figure comme antécédent, il en est de même pour $A(y)$ avec une variable y et donc pour $A(n)$ avec un chiffre n . Si donc $A(n)$ est vraie, $\bigvee_x A(x)$ l'est aussi. Enfin si $\bigwedge_x A(x)$ figure comme antécédent, il en est de même pour $A(n)$ et cela pour tout n puisque, dans une suite d'antécédents infinie doit se trouver une infinité d'implications critiques. Ainsi, par hypothèse d'induction, toutes les formules $A(n)$ sont vraies et partant $\bigwedge_x A(x)$ l'est aussi.

Il en est exactement de même pour les conséquents : ils sont tous faux. Toutes les implications de la suite particulière d'antécédents, et en particulier l'implication de départ, sont non valides.

Si le proposant commence par une implication qui n'est pas non valide et s'il utilise la stratégie particulière donnée, l'opposant ne peut, par ses choix, fournir une suite d'antécédents infinie. Nous ajouterons qu'il ne peut fournir non plus une suite finie qui ne se terminerait pas par une implication fondamentale. Une telle suite devrait, en effet, se terminer par une implication primitive qui ne serait pas une implication fondamentale. Elle serait donc non valide. Mais si une implication non valide se présente dans une suite d'antécédents, toutes les implications antérieures sont aussi non valides, ainsi que le montre immédiatement la définition sémantique de la vérité.

Ce caractère complet qu'il fallait établir au sein des mathématiques constructives (il n'existe de contre-stratégie que pour les implications non valides) ne justifie toutefois pas encore la logique classique des quantificateurs. Nous ne pouvons conclure de façon constructive que seules sont dérivables des implications valides. Il nous faudra, en lieu et place au prochain paragraphe, prouver de façon constructive la consistance du formalisme de Peano.

§ 7. Consistance de l'arithmétique classique

Nous avons vu au § 6 que la consistance du formalisme de Peano est équivalente à la non-dérivabilité d'au moins une implication : $\forall < \wedge$ par exemple.

La consistance du semi-formalisme arithmétique, en ce sens que $\forall < \wedge$ n'y est pas dérivable, est triviale. En effet, $\forall < \wedge$ n'est pas une implication fondamentale mais, comme toute implication primitive, elle n'a aucun antécédent. En conséquence on ne peut la soutenir.

Ceci permet d'aborder la consistance du formalisme de Peano de la façon suivante. Il faut montrer que, même si on rajoute au semi-formalisme toutes les implications fondamentales (les axiomes) et les règles du formalisme de Peano, aucune implication nouvelle ne s'ajoute à la classe des implications dérivables dans le semi-formalisme.

La chose n'est pas difficile pour les axiomes : ils se trouvent être tous dérivables dans le semi-formalisme (non modifié). Il ne reste alors qu'à montrer que la règle de transitivité est *admissible*, c'est-à-dire qu'une implication $A < B$ est toujours dérivable dans le semi-formalisme, si $A < C$ et $C < B$ le sont.

Cette façon d'aborder la consistance du formalisme de Peano en passant par le semi-formalisme peut apparaître, à première vue, comme un détour. Toutefois elle se justifie en fournissant plus que la simple consistance. Elle conduit encore à l' ω -consistance. Voici ce qu'on entend par là. Une formalisation de l'arithmétique est dite *ω -consistante* s'il n'existe aucune formule $A(x)$ telle que toutes ses spécialisations $A(0), A(0'), A(0''), \dots$ et en même temps l'universelle négative $\neg \bigwedge_x A(x)$ n'y sont dérivables.

Supposons que nous ayons atteint notre but et que la consistance du formalisme de Peano soit établie, même après adjonction de l'induction infinie. L' ω -consistance est alors immédiate. Si en effet toutes les spécialisations $\forall < A(n)$ de l'implication $\forall < A(x)$ sont dérivables, cette dernière l'est aussi — dans le semi-formalisme — et donc $\forall < \bigwedge_x A(x)$ est aussi dérivable. Et si $\forall < \neg \bigwedge_x A(x)$ était dérivable, le semi-formalisme serait inconsistent.

Passons maintenant à la preuve de consistance. La dérivabilité des axiomes

(6.11) et (6.12) dans le semi-formalisme est triviale. Ce sont en effet des implications fondamentales. Cela vaut aussi pour (6.10), dans le cas où c est une formule atomique sans variable libre. En effet, c est alors soit vraie soit fausse et, ou bien on a à gauche une formule atomique fausse, ou bien on a à droite une formule atomique vraie. Si c contient une variable libre, il en résulte que toutes les spécialisations de (6.10) sont dérivables et donc, par induction infinie, que (6.10) elle-même est dérivable.

Les autres axiomes du formalisme de Peano, à l'exception de (6.2) et de (6.9) dans lesquels figurent des formules arbitraires, peuvent être traités de façon aussi simple. Si en effet les s et les t qui s'y trouvent sont des constantes, on aura toujours une proposition atomique fausse à gauche ou une vraie à droite, puisque « vrai » et « faux » sont précisément définis ainsi. Si s et t ne sont pas des constantes, il faudra de nouveau faire usage de l'induction infinie.

Même pour (6.2), il suffit de se limiter à des termes s et t constants. Si la formule atomique $s = t$ est alors fausse, (6.2) est une implication fondamentale. Il reste à considérer le cas où $s = t$ est vraie. Si $A(s)$ est une formule atomique, disons $u(s) = v(s)$ avec des termes dans lesquels se trouve éventuellement s , il faut alors déduire :

$$s = t \wedge u(s) = v(s) < u(t) = v(t)$$

Remplaçons les variables libres qui figurent dans $u(s)$ et dans $v(s)$ par des chiffres. Il reste des implications fondamentales, puisque $s = t$ et $u(s) = v(s)$ ne peuvent être vraies et en même temps $u(t) = v(t)$ fausses.

Nous allons maintenant prouver la déductibilité de

$$s = t \wedge A(s) < A(t)$$

par induction sur les formules partielles relativement à $A(s)$. Pour cela nous allons d'abord établir un lemme général pour notre semi-formalisme.

Lemme : La règle

$$(7.1) \quad A < B \Rightarrow F \wedge A < B \vee G$$

est admissible.

On dit que l'implication de droite provient *par atténuation* de celle de gauche. La preuve se déroule comme pour le théorème de la déduction. Toutes les implications qui se présentent dans la dérivation de $A < B$ sont atténuées avec F et G . Les implications fondamentales sont ainsi transformées en de nouvelles implications fondamentales et les nouvelles prémisses conduisent, par les mêmes règles qu'avant, aux nouvelles conclusions.

Nous pouvons maintenant passer de

$$s = t \wedge A(s) < A(t)$$

et

$$s = t \wedge B(s) < B(t)$$

à

$$s = t \wedge A(s) \wedge B(s) < A(t) \wedge B(t).$$

Commençons en effet par atténuer les prémisses en :

$$s = t \wedge A(s) \wedge B(s) < A(t)$$

et

$$s = t \wedge A(s) \wedge B(s) < B(t).$$

Il ne nous reste qu'à appliquer la règle (6.13).

On obtient de la même façon :

$$s = t \wedge A(s) \vee B(s) < A(t) \vee B(t)$$

Il est facile de procéder à l'induction sur les autres formules partielles, composées à l'aide de $\neg$, $\wedge_x$ et $\vee_x$. Il suffit, en effet, de modifier les raisonnements que nous avons faits pour établir le lemme de la fin du § 2. De plus cette induction conduira en même temps à la dérivabilité des implications de la forme (7.2) $A < A$.

Cette réflexivité permet de passer sans peine à l'axiome d'induction. Nous allons montrer que, pour tout chiffre n , l'expression :

$$A(0) \wedge \wedge_x. \neg A(x) \vee A(x') < A(n)$$

est dérivable. Pour $n = 0$, la chose découle par atténuation de $A(0) < A(0)$. Si la dérivabilité est déjà prouvée pour n , elle le sera pour n' de la manière suivante :

$$A(0) \wedge \wedge_x. \neg A(x) \vee A(x') < A(n) \vee A(n')$$

$$A(0) \wedge \wedge_x. \neg A(x) \vee A(x') \wedge \neg A(n) < A(n')$$

$$A(0) \wedge \wedge_x. \neg A(x) \vee A(x') \wedge A(n') < A(n')$$

$$A(0) \wedge \wedge_x. \neg A(x) \vee A(x') \wedge \neg A(n) \vee A(n') < A(n')$$

$$A(0) \wedge \wedge_x. \neg A(x) \vee A(x') < A(n')$$

Il est ainsi prouvé que tous les axiomes du formalisme de Peano sont dérivables et il ne reste, pour avoir une preuve de la consistance, qu'à montrer que la transitivité est admissible dans le semi-formalisme. C'est en principe très simple. Il s'agit de procéder à une induction sur les formules partielles en appliquant éventuellement, dans les pas d'induction, des inductions sur

les prémisses (voir plus bas). Nous allons prouver d'une façon un peu plus générale l'admissibilité de :

$$(7.3) \quad F < C \vee G, F \wedge C < G \Rightarrow F < G$$

La transitivité découle immédiatement de cette *règle de coupure* (7.3), puisque les prémisses $F < C \vee G$ et $F \wedge C < G$ résultent de $F < C$ et $C < G$ par atténuation.

Observons enfin que les « inverses » des règles du semi-formalisme sont admissibles, par quoi nous entendons les règles suivantes :

$$(7.4) \quad \begin{aligned} F < A \wedge B \vee G &\Rightarrow F < A \vee G \\ F < A \wedge B \vee G &\Rightarrow F < B \vee G \end{aligned}$$

$$(7.5) \quad \begin{aligned} F \wedge A \vee B < G &\Rightarrow F \wedge A < G \\ F \wedge A \vee B < G &\Rightarrow F \wedge B < G \end{aligned}$$

$$(7.6) \quad \begin{aligned} F < \neg C \vee G &\Rightarrow F \wedge C < G \\ F \wedge \neg C < G &\Rightarrow F < C \vee G \end{aligned}$$

$$(7.7) \quad F < \bigwedge_x B(x) \vee G \Rightarrow F < B(y) \vee G$$

$$(7.8) \quad F \wedge \bigvee_x A(x) < G \Rightarrow F \wedge A(y) < G$$

$$(7.9) \quad A(x) < B(x) \Rightarrow A(n) < B(n)$$

Il n'est pas nécessaire d'écrire les inverses pour les règles (6.18) et (6.20), puisque leurs prémisses résultent par atténuation de leurs conclusions.

Passons maintenant à la preuve de l'admissibilité de (7.4). Nous verrons alors que les preuves des autres inverses peuvent se calquer sur cet exemple. L'admissibilité de (7.4) est un énoncé sur toutes les implications dérivables dans le semi-formalisme. Il pose, en effet, que pour toute implication *dérivable* I , on a :

$$(7.10) \quad \text{Si } I \text{ est de la forme } F < A \wedge B \vee G, \text{ alors } F < A \vee G \text{ est dérivable.}$$

Un tel énoncé peut se prouver par une induction sur les prémisses, c'est-à-dire qu'on le prouve :

- (1) pour toutes les implications fondamentales I ,
- (2) pour les conclusions des règles du semi-formalisme, sous l'hypothèse que leurs prémisses sont dérivables et que l'énoncé est vérifié pour ces prémisses.

Pour les implications fondamentales, (7.10) est trivial, puisque ces dernières ne sont jamais de la forme $F < A \wedge B \vee G$. Il reste donc à examiner les règles (6.13) à (6.20) et (6.23).

La conclusion de (6.13) est $F < A \wedge B \vee G$. Une de ses prémisses est $F < A \vee G$. Si G est de la forme $A' \wedge B' \vee G'$, $F < A \vee A' \wedge B' \vee G'$ et $F < B \vee A' \wedge B' \vee G'$ sont des prémisses. Par hypothèse d'induction $F < A \vee A' \vee G'$ et $F < B \vee A' \vee G'$ sont dérivables et donc

$$F < A \wedge B \vee A' \vee G'$$

l'est aussi.

La preuve est analogue pour les autres règles (6.14) à (6.20) et (6.23). Nous ne la donnerons que pour (6.23). La conclusion est $I(x)$. Si $I(x)$ est de la forme $F(x) < A(x) \wedge B(x) \vee G(x)$, alors $F(n) < A(n) \wedge B(n) \vee G(n)$ sont des prémisses et donc, par hypothèse d'induction, $F(n) < A(n) \vee G(n)$ est dérivable pour tout n . Donc $F(x) < A(x) \vee G(x)$ l'est aussi.

On voit que la présence d'une infinité de prémisses n'a aucune influence sur la marche de la preuve.

L'admissibilité de (7.4) est ainsi prouvée. La preuve de (7.5) se déroule de façon duale. Pour (7.6), il faut prouver par induction sur les prémisses que, pour toute implication *dérivable* I , on a :

(7.11) Si I est de la forme $F < \neg C \vee G$, alors $F \wedge C < G$ est dérivable.

Pour les implications fondamentales I , (7.11) est trivial.

La conclusion de (6.13) est $F < A \wedge B \vee G$. Si G est de la forme $\neg C \vee G'$, $F < A \vee \neg C \vee G'$ et $F < B \vee \neg C \vee G'$ sont des prémisses. Par hypothèse d'induction $F \wedge C < A \vee G'$ et $F \wedge C < B \vee G'$ sont dérivables et donc $F \wedge C < A \wedge B \vee G'$ l'est aussi.

On traitera de nouveau les autres règles de façon analogue.

L'admissibilité de la deuxième règle (7.6) s'obtient de même et la preuve pour (7.7) et (7.8), par induction sur les prémisses, ne s'écarte en rien des exemples donnés. Ceci vaut enfin pour (7.9) puisque, ici encore, l'infinité des prémisses ne cause pas de difficultés.

Nous pouvons donc considérer que toutes les inverses sont prouvées et passer à (7.3).

Il faut prouver ici que, pour toute formule C et pour tout couple d'implications dérivables I_1 et I_2 , on a :

(7.12) Si I_1 et I_2 sont de la forme $F < C \vee G$ et $F \wedge C < G$, alors $F < G$ est dérivable.

La preuve se fera par induction sur les formules partielles relativement à C . Supposons donc pour commencer que C soit une proposition atomique c . Procédons alors par induction sur les prémisses relativement à I_1 et I_2 . Si $F < c \wedge G$ est une implication fondamentale et si c est fausse, $F < G$ devra

être une implication fondamentale. De même, si $F \wedge c < G$ est une implication fondamentale et si c est vraie.

Si $F < c \vee G$ est conclusion d'une règle, disons de (6.17), G est alors de la forme $\bigwedge_x B(x) \vee G'$ et la prémisse est $F < c \vee B(y) \vee G'$. Par inversion de (6.17), $F \wedge c < G$ donne : $F \wedge c < B(y) \vee G'$. L'hypothèse d'induction sur les prémisses donne donc $F < B(y) \vee G'$ et il vient par (6.17) : $F < \bigwedge_x B(x) \vee G'$, c'est-à-dire $F < G$.

Toutes les autres règles sont à traiter de la même manière, y compris lorsque $F \wedge c < G$ est la conclusion d'une règle.

Ainsi (7.12) est prouvé pour des propositions atomiques C . Si C est une formule atomique avec des variables libres, il suffit de spécialiser arbitrairement ces variables dans I_1 et I_2 . On obtient ainsi toutes les spécialisations de $F < G$ et partant $F < G$ elle-même.

Admettons maintenant pour l'induction sur les formules partielles de C , que C est composée et que (7.12) est déjà valable pour ses composantes. Supposons alors que C est de la forme $C_1 \wedge C_2$. La dérivabilité de $F < C_1 \wedge C_2 \vee G$ et de $F \wedge C_1 \wedge C_2 < G$ est ainsi acquise. En inversant (6.13) il vient $F < C_1 \vee G$ et $F < C_2 \vee G$ et, par atténuation, $F \wedge C_1 < C_2 \vee G$. L'hypothèse d'induction conduit alors sans plus à $F \wedge C_1 < G$ et donc à $F < G$.

On traitera de façon duale la composition avec $\vee$. Si nous avons affaire à des implications $F < \neg C \vee G$ et $F \wedge \neg C < G$, nous obtiendrons par inversion $F \wedge C < G$ et $F < C \vee G$, donc $F < G$ par hypothèse d'induction.

Reste encore le cas de $F < \bigwedge_x C(x) \vee G$ et $F \wedge \bigwedge_x C(x) < G$. On a ici comme hypothèse d'induction que (7.12) est valable pour toute formule $C(t)$. Les procédés de preuve utilisés jusqu'ici assurent qu'on ne dispose d'aucune inversion qui fasse disparaître la formule $\bigwedge_x C(x)$ dans la formule $F \wedge \bigwedge_x C(x) < G$. Il nous faut donc, une fois encore, faire usage de l'induction sur les prémisses relativement à $F \wedge \bigwedge_x C(x) < G$. S'il s'agit d'une implication fondamentale, $F < G$ en sera aussi une. Supposons alors que $F \wedge \bigwedge_x C(x) < G$ soit la conclusion d'une règle, disons de la règle (6.15), avec un G de la forme $\neg C' \vee G'$. La prémisse devient $F \wedge \bigwedge_x C(x) \wedge C' < G'$. Par hypothèse d'induction sur les prémisses, il vient ainsi $F \wedge C' < G'$, donc $F < \neg C' \vee G'$, c'est-à-dire $F < G$.

Si $F \wedge \bigwedge_x C(x) < G$ est la conclusion d'une autre règle, on procédera exactement de la même façon. On ne rencontre une singularité que dans le cas de la règle (6.18), où la prémisse est de la forme $F \wedge \bigwedge_x C(x) \wedge C(t) < G$. On tire de $F < \bigwedge_x C(x) \vee G$ par atténuation $F \wedge C(t) < \bigwedge_x C(x) \vee G$. L'hypothèse d'induction donne ainsi $F \wedge C(t) < G$. D'autre part $F < \bigwedge_x C(x) \vee G$ donne par inversion $F < C(y) \vee G$ et donc aussi $F < C(t) \vee G$.

On prendra garde que y ne figure libre ni dans F ni dans G . L'hypothèse d'induction sur les formules donne alors $F < G$.

Comme les formules $\forall x C(x)$ peuvent être traitées de façon duale, (7.12) est complètement prouvé.

En tenant encore compte de la dérivabilité des axiomes de Peano dans le semi-formalisme, nous aurons ainsi prouvé l' ω -consistance de ce formalisme, et en particulier sa consistance simple.

On peut s'assurer rétrospectivement que la preuve de consistance fournie ne constitue pas essentiellement une preuve de la consistance de l'arithmétique, mais plutôt de celle de la logique classique des quantificateurs. Nous avons introduit ce calcul logique pour greffer sur la logique effective des quantificateurs une symétrie qui existait dans la logique classique des joncteurs (il s'agissait de la dualité entre $\wedge$ et $\vee$). Pour appliquer le calcul logique à un système d'axiomes, nous avons encore ajouté la transitivité de $<$. Pour ne pas rompre le fil de la pensée, nous n'avons pas voulu nous demander alors si l'usage de la transitivité simplifiait beaucoup les choses. Voyons maintenant rapidement la question. Il est extrêmement commode en effet, pour la preuve de consistance, d'écrire les implications $F < G$ à l'aide d'une formule conjonctive F , d'une formule adjonctive G et de s'autoriser expressément à permuter et à associer librement les termes. Mais ceci est totalement superflu pour un calcul logique. Et pour dériver toutes les implications logiquement valides au sens classique, les axiomes :

$$(7.13) \quad \wedge < A$$

$$(7.14) \quad A < A$$

$$(7.15) \quad A < \vee$$

et les règles suivantes (seule (7.19) n'est pas effectivement valide) suffisent :

$$(7.16) \quad A < B, B < C \Rightarrow A < C$$

$$(7.17) \quad C < A, C < B \Leftrightarrow C < A \wedge B$$

$$(7.18) \quad A < C, B < C \Leftrightarrow A \vee B < C$$

$$(7.19) \quad A \wedge B < C \Rightarrow A < \neg B \vee C$$

$$(7.20) \quad A < B \vee C \Rightarrow A \wedge \neg B < C$$

$$(7.21) \quad A < B(y) \Leftrightarrow A < \bigwedge_x B(x)$$

$$(7.22) \quad A(y) < B \Leftrightarrow \bigvee_x A(x) < B$$

Dans ce qui précède, nous avons exprimé par $\Leftrightarrow$ le fait que les règles peuvent aussi être lues en sens inverse. Si donc, comme dans (7.17) et (7.18), on trouve deux implications (séparées par „) à gauche, on aura deux règles par inversion.

Dans les règles (7.21) et (7.22) pour les quantificateurs, les conditions sur les variables doivent de nouveau être respectées : x doit être libre pour y et, dans le sens $\Rightarrow$, y ne doit pas figurer libre à droite.

L'équivalence du nouveau calcul (7.13)-(7.22) avec le calcul des quantificateurs (6.10)-(6.21), où les termes t sont restreints aux variables, est triviale. À part l'extension de la réflexibilité à des termes quelconques, les nouvelles règles ne sont en effet que des cas spéciaux des anciennes et de leurs inverses. Réciproquement, les règles précédentes découlent de (7.13)-(7.22) par atténuation et on peut voir comme suit qu'elles sont admissibles dans le nouveau calcul : $A \wedge A' < A \wedge A'$ donne par (7.17) $A \wedge A' < A$. De plus on peut passer de $A < B$ à $A \wedge A' < B$ par (7.16). De même enfin on peut obtenir $A < B \vee B'$.

Si maintenant on abandonne la logique pure et qu'on ait affaire à une théorie particulière, disons à l'arithmétique, on rencontrera en général, à côté des variables, des termes $s, t, \dots$, qui sont construits à partir des termes primitifs.

Au lieu de tenir compte des termes en reformulant les règles (7.21) et (7.22), on peut utiliser une règle de substitution pour les implications $I(x)$ qui contiennent une variable libre :

$$(7.23) \quad I(x) \Rightarrow I(t).$$

S'il s'agit d'une théorie qui fait partie des mathématiques constructives, on donnera encore un procédé de construction qui engendre — en tant naturellement que simples symboles — tous les objets de la théorie. Si n est une variable pour les constantes de la théorie (il s'agissait en arithmétique des chiffres $0, 0', 0'', \dots$), il faudra encore introduire la règle d'induction infinie :

$$(7.24) \quad \bigwedge_n I(n) \Rightarrow I(x)$$

Enfin, pour les propositions atomiques $a, b, \dots$ de la théorie, il suffit d'introduire à la place de (6.22) des implications fondamentales de la forme :

$$(7.25) \quad a < b.$$

Ainsi la preuve donnée implique encore la consistance du nouveau semi-formalisme (7.13)-(7.25). Quel parti avons-nous tiré pour cela des implications fondamentales (7.25)? Si on reparcourt la preuve, on remarquera que le partage des propositions atomiques en « vraies » et « fausses » sert seulement à établir que la réflexivité

$$(7.26) \quad c < c$$

d'une part et la transitivité

$$(7.27) \quad a < c, c < b \Rightarrow a < b$$

d'autre part sont déductibles et admissibles pour des propositions atomiques a , b et c . Ceci, compte-tenu de ce que $a < b$ est « valide » lorsque a est fausse ou que b est vraie, conduit bien en fait au partage des propositions. Puisque c est en effet certainement ou vraie ou fausse, (7.26) est valide et puisque c n'est pas à la fois vraie et fausse, il faut pour que les prémisses de (7.27) soient valides que a soit vraie ou que b soit fausse, c'est-à-dire que $a < b$ soit valide.

Pour prouver la consistance du semi-formalisme arithmétique avec la transitivité, on n'utilise de toute l'arithmétique que les propositions (7.26) et (7.27). La situation est naturellement différente si l'on veut introduire dans la preuve de consistance les axiomes de Peano (6.1) à (6.9). On est alors obligé d'utiliser une plus grande partie de l'arithmétique. C'est qu'il faut prouver que les axiomes de Peano sont dérivables. Ces « preuves » ont toutefois déjà été données au § 5. Elles appartiennent aux mathématiques constructives et sont triviales pour les axiomes de Peano. Comme nous l'avons vu en effet, ceux-ci ne sont essentiellement rien d'autre que les définitions inductives des relations fondamentales $=$, $\neq$ et des fonctions fondamentales $+$ et $\cdot$. Tout au plus l'axiome d'induction joue-t-il un rôle à part. La dérivation, que nous avons donnée au cours de la preuve de consistance, ne se distingue de celle constructive du § 5 qu'en ceci que la première conditionnelle $\rightarrow$ dans (5.10) devait être remplacée par $\rightarrow \dots \vee \dots$. Il reste naturellement que, en principe, l'axiome d'induction devrait être établi en appliquant une induction au métaniveau. Il n'y a toutefois pas là de régression infinie, puisque le fondement opératoire de l'induction est indépendant du niveau linguistique de la formule $A(x)$.

Si l'on n'avait pas affaire à l'arithmétique mais à une autre théorie, dont les objets seraient engendrés par une construction symbolique et dont les concepts fondamentaux seraient définis inductivement, il suffirait de nouveau pour l'axiomatiser de prendre les définitions inductives elles-mêmes et de les accompagner d'un axiome d'induction. Les propositions atomiques sont, dans tous les cas, d -définies par les définitions inductives des concepts fondamentaux. En arithmétique même, les concepts fondamentaux étaient v -définis. C'est ce qui permettait de définir la validité des implications fondamentales $a < b$ pour les propositions atomiques par : a fausse ou b vraie. Toutefois cette définition classique de l'implication n'est pas indispensable. Il suffit de poser, pour les propositions atomiques d -définies a et b , que $a < b$ doit être « valide » si un dialogue, dans lequel l'opposant affirme

a et le propositant b , peut toujours être gagné par le propositant. La réflexivité (7.26) est naturellement aussi valable pour cette validité effective. Dire que la transitivité (7.27) est admissible, signifie maintenant que $a < b$ est valide si $a < c$ et $c < b$ le sont. Il est vrai qu'il s'agit-là d'un jugement dans la métalangue, mais il est trivial. Dans une interprétation opératoire en effet, l'opposant O doit tout d'abord affirmer $a < c$ et $c < b$ et le propositant $P : a < b$. Cela revient à dire qu'il doit soutenir b si O a posé a . Si maintenant P pose a , O doit poser c , puisque $a < c$ et si P pose alors c , O doit encore poser b puisque $c < b$. Donc P peut s'appuyer sur ce b . Cette façon de faire est celle même qui serait utilisée pour une stratégie de gain dans la situation suivante :

$$\begin{array}{c} A \rightarrow C \\ C \rightarrow B \end{array} \parallel A \rightarrow B$$

Elle est donc la même que celle qui établit la validité logique effective de l'implication :

$$A \rightarrow C \wedge C \rightarrow B < A \rightarrow B.$$

Si aux implications fondamentales $a < b$, on ajoute le semi-formalisme (7.13)-(7.24), notre preuve de consistance conduit au résultat suivant : Toutes les implications dérivables le sont aussi si on atténue les implications fondamentales $a < b$ en :

$$F \wedge a < b \vee G$$

et si on utilise les seules règles (6.13)-(6.20) et l'induction infinie. Nous en avons conclu que $\forall < \wedge$ ne pouvait se dériver de (7.13)-(7.24). Plus généralement, nous pouvons dire que, par (7.13)-(7.24), ne sont dérivables que les implications $a < b$ entre propositions atomiques qui sont prises comme propositions fondamentales de départ. La logique classique toute entière, y compris l'induction infinie, ne fournit donc aucune implication nouvelle entre propositions atomiques. Telle est la signification de la consistance qui a été prouvée.

Pour l'arithmétique en particulier, ce résultat général signifie qu'on n'a pas besoin de se limiter, pour ce qui est de la consistance, aux propositions atomiques v -définies comme celles que nous avons et qui sont des équations entre termes, construites à l'aide de l'addition et de la multiplication seulement. De nouveaux concepts fondamentaux quelconques peuvent être ajoutés, à condition naturellement qu'ils soient d -définis, sans quoi il n'y aurait plus aucun sens à affirmer que $a < b$.

CHAPITRE III

ARITHMÉTISATION DES FORMALISMES

§ 8. Formalismes complets⁹

Nous aborderons le problème de l'incomplétude de l'arithmétique formalisée par une question qui a son intérêt, que sa réponse conduise ou non au résultat escompté. Comment définir mathématiquement la différence entre un « formalisme » et un « semi-formalisme » ? Il ne suffit pas, en effet, de dire simplement qu'un formalisme doit être un système fini de règles « finies ». Si même on pose qu'une règle « finie » est une règle de la forme :

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n \Rightarrow \mathfrak{A},$$

il reste encore à savoir quel aspect les formules $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n, \mathfrak{A}$ peuvent avoir. Le système de Peano est-il un système de règles fini, bien que l'axiome d'induction fournisse un nouvel axiome pour toute formule $A(x)$? D'autre part, l'induction infinie n'est-elle pas une règle finie, puisque mise sous la forme

$$\mathcal{A}_n I(n) \Rightarrow I(x)$$

elle n'a bien qu'une seule prémisse ?

Pour répondre à ces questions, il faudra tout d'abord chercher une définition appropriée du concept de « formalisation ». Il s'ensuit qu'on ne pourra les résoudre sans une certaine part d'arbitraire : il s'agit en effet d'un choix de définition. Théoriquement on est parfaitement libre, mais pratiquement tous les logiciens sont d'accord sur ce qu'il faut entendre — sensément — par une formalisation. Pourquoi prend-on alors la peine de s'encombrer d'une formalisation ? Réponse : la preuve des propositions mathématiques doit pouvoir se réduire à des opérations schématiques selon des règles, de telle sorte qu'une « preuve » soit une suite finie d'expressions et qu'on puisse vérifier — sur la seule base de la composition des symboles — si chacune d'elle découle des expressions qui la précèdent selon une des règles données.

9. Pour éviter les confusions qui pourraient résulter des expressions « formalisme complet » au sens de *Vollformalismus* et « caractère complet » au sens de *Vollständigkeit*, j'appellerai par la suite simplement « formalisme » ce que l'auteur désigne par *Vollformalismus*.

Il faut ainsi que les règles aient un nombre fini de prémisses, qu'elles soient donc de la forme

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{A}$$

et que $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n, \mathcal{A}$ représentent des expressions construites à l'aide de certains symboles atomiques (en nombre fini). Commençons par examiner sous cet angle les formules de l'arithmétique du Chapitre II. On y trouve le chiffre 0, les signes de fonctions $'$, $+$, $\times$ (pour plus de clarté, nous écrivons maintenant $\times$ au lieu de $\cdot$), le signe de relation $=$, les particules logiques $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$, les constantes logiques $\forall, \exists$ et enfin des variables $x, y, \dots$.

Nous n'avons pas déterminé encore la façon dont les variables devaient être construites à partir de symboles atomiques. Nous allons combler cette lacune en nous donnant la lettre ξ comme variable et en formant d'autres variables à l'aide d'un $*$ placé à gauche : $\xi, *\xi, **\xi, \dots$.

Finalement, nous avons les 14 symboles atomiques suivant :

$$0' + \times = \wedge \vee \neg \rightarrow \leftrightarrow \forall \exists \xi *.$$

Nous n'avons pas inclus dans cette liste les parenthèses $(,)$ utilisées jusqu'ici. Il est en effet facile, par un artifice dont l'idée remonte à ŁUKASIEWICZ, d'économiser entièrement les parenthèses, de même que les points qui servent à les éviter. En effet, si on n'écrit pas les signes de fonction, que nous appellerons brièvement des *foncteurs*, tantôt devant, tantôt derrière, tantôt entre leurs arguments, mais exclusivement en tête, toutes les parenthèses sont immédiatement superflues.

Exemple : L'expression $((x + y) \cdot z)'$ devait s'écrire :

$$((\xi + *\xi) \times **\xi)'.$$

Au lieu de quoi nous écrirons maintenant :

$$' \times + \xi * \xi ** \xi.$$

Il faut reconnaître qu'on doit s'habituer à ce genre d'écriture. Mettre en tête le $'$ ne fait évidemment guère de difficulté. Ce qui est inhabituel, c'est que les foncteurs binaires $+$ et $\times$ ne se trouvent plus entre les arguments. Pour ne pas entrer en conflit avec les habitudes de lecture antérieures, nous remplacerons dans ce qui suit les foncteurs binaires $+$ et $\times$, de même que $=, \wedge, \vee$ que nous devons aussi ranger parmi les foncteurs, par les symboles atomiques suivants :

$$\Gamma_+, \Gamma_\times, \Gamma_-, \Gamma_\wedge, \Gamma_\vee.$$

Notre exemple s'écrit alors :

$$' \Gamma_{\times} \Gamma_{+} \xi * \xi ** \xi.$$

Ici $\Gamma_{+} \xi * \xi$ est mis pour $(\xi + * \xi)$ et $\Gamma_{\times} \Gamma_{+} \xi * \xi ** \xi$ pour $((\xi + * \xi) \times ** \xi)$.

La liste définitive des symboles se présente donc ainsi (en modifiant légèrement leur ordre) :

$$0, \xi, \vee, \wedge, ', *, \neg, \Gamma_{+}, \Gamma_{\times}, \Gamma_{=}, \Gamma_{\wedge}, \Gamma_{\vee}, \wedge, \vee.$$

Nous appellerons cette liste l'*alphabet* de la formalisation. Il se compose des quatre constantes $0, \xi, \vee, \wedge$, des trois foncteurs monaires $', *, \neg$ et des sept foncteurs binaires

$$\Gamma_{+}, \Gamma_{\times}, \Gamma_{=}, \Gamma_{\wedge}, \Gamma_{\vee}, \wedge, \vee.$$

Les quantificateurs, que nous avons toujours écrits sous la forme $\wedge_x$ et $\vee_x$ avec une variable x en indice, se présentent maintenant comme des foncteurs binaires. Le premier argument est une variable x et le second une formule $A(x)$. Ainsi la formule

$$\wedge_x \wedge_y ((x + y) = (y + x))$$

s'écrit « officiellement » sous la forme :

$$\wedge \xi \wedge * \xi \Gamma_{=} \Gamma_{+} \xi * \xi \Gamma_{+} * \xi \xi.$$

Les seules compositions qui figureront dans la formalisation seront faites de *lettres* (les symboles atomiques) de cet alphabet. Toutes les compositions cependant n'y figurent pas. Seules s'y trouvent les compositions qui *ont un sens*. Nous poserons la condition minimum suivante : pour qu'un foncteur ait un sens il doit être suivi d'un nombre de compositions, qui ont un sens, exactement égal au nombre de ses arguments. Nous partons ainsi des constantes $0, \xi, \vee, \wedge$ et formons de nouvelles expressions en faisant précéder une expression déjà formée d'un foncteur monaire, ou en faisant précéder deux expressions déjà formées d'un foncteur binaire. Toutes les expressions, construites de cette façon à partir de l'alphabet, peuvent être appelées des *mots*.

Nous utiliserons les lettres $p, q, \dots$ comme variables de mots. Les mots sont donc des expressions qui doivent être construites par les règles suivantes :

$$(1) \quad \begin{array}{l} 0 \\ \xi \\ \vee \\ \wedge \end{array}$$

- (2) $\begin{array}{l} 'p \\ *p \\ \neg p \end{array}$ pour tout mot p
- (3) $\begin{array}{l} \Gamma_+ pq \\ \Gamma_{\times} pq \\ \Gamma_- pq \\ \Gamma_{\wedge} pq \\ \Gamma_{\vee} pq \\ \wedge pq \\ \vee pq \end{array}$ pour tout couple de mots p, q .

Il est évident que ceci fournit encore de nombreux mots qui n'ont pas de sens, tel $\neg \Gamma_+ \xi 0$, par exemple. Nous avons cependant effectué déjà un premier choix et toutes les formules pour lesquelles nous définirons des implications dans la formalisation feront partie de ce choix.

Examinons maintenant de plus près une formalisation de l'arithmétique, comme (6.1)-(6.9), (7.13)-(7.23) et voyons comment sont formées les règles. Elles ne sont pas entièrement constituées de mots. À côté des lettres de l'alphabet elles contiennent essentiellement des variables, les $x, y, \dots, s, t, \dots$ et $A, B, \dots$. Puisque nous faisons maintenant de ces règles mêmes l'objet de notre étude, introduisons de nouvelles variables $u, v, \dots$ comme variables d'objet pour les mots. Elles correspondent aux $x, y, \dots$ en arithmétique. Nous allons montrer qu'il est possible de se tirer d'affaire avec cette seule espèce de variables (pour les mots). Ainsi, nous n'aurons besoin de variables ni pour les nombres, ni pour les termes, ni pour les formules. Pour y parvenir, il nous faut rajouter à notre système de règles les définitions inductives de ces classes de mots (on dit le plus souvent en logique « classe » au lieu d'« ensemble »). À partir des mots nous formons des *propositions* de la forme :

p est une variable de nombre,
 p est un terme,
 p est une formule.

Comme nous avons déjà utilisé les variables x, t et A pour ces classes, abrégeons les propositions ci-dessus par :

$P_x p$
 $P_t p$
 $P_A p$

P_x, P_t, P_A sont donc introduits comme de nouveaux symboles atomiques. Nous pouvons alors déjà poser les 15 règles suivantes pour les définitions inductives :

$$\begin{aligned}
(8.1) \quad & \begin{cases} P_x \xi \\ P_x u \Rightarrow P_x * u \end{cases} \\
(8.2) \quad & \begin{cases} P_t 0 \\ P_x u \Rightarrow P_t u \\ P_t u \Rightarrow P_t' u \\ P_t u, P_t v \Rightarrow P_t \Gamma_+ u v \\ P_t u, P_t v \Rightarrow P_t \Gamma_{\times} u v \end{cases} \\
(8.3) \quad & \begin{cases} P_A \vee \\ P_A \wedge \\ P_t u, P_t v \Rightarrow P_A \Gamma_{=} u v \\ P_A u, P_A v \Rightarrow P_A \Gamma_{\wedge} u v \\ P_A u, P_A v \Rightarrow P_A \Gamma_{\vee} u v \\ P_A u \Rightarrow P_A \neg u \\ P_x u, P_A v \Rightarrow P_A \wedge u v \\ P_x u, P_A v \Rightarrow P_A \vee u v. \end{cases}
\end{aligned}$$

Soit un mot p : p est une variable de nombre si et seulement si $P_x p$ est dérivable par les règles; p est un terme si et seulement si $P_t p$ est dérivable; p est une formule si et seulement si $P_A p$ est dérivable.

Nous pouvons maintenant constater ce qui suit. Nous sommes partis d'un alphabet et nous avons construit certaines expressions, les mots. Ces mots ne figurent pas dans les règles ci-dessus, mais les règles contiennent des formules, formées d'un *relateur* P_x, P_t, P_A suivi d'un terme. Les termes se distinguent donc des mots en ce qu'ils contiennent encore, en plus des lettres de l'alphabet, des variables de mots $u, v, \dots$. Par ailleurs les nouveaux termes, que nous appellerons des *termes-mots*, sont simplement construits selon les mêmes instructions. Cela veut dire que

- (1) les constantes $0, \xi, \vee, \wedge$ sont des termes-mots,
- (2) les variables de mots $u, v, \dots$ sont des termes-mots,
- (3) si s et t sont des termes-mots :

$$\begin{aligned}
& ' s \\
& * s \\
& \neg s \\
& \Gamma_+ s t \\
& \Gamma_{\times} s t \\
& \Gamma_{=} s t \\
& \Gamma_{\wedge} s t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\vee} s t \\ \wedge s t \\ \vee s t \end{aligned}$$

sont des termes-mots.

Nous ferons usage des variables $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots$ pour désigner les *formules* qui forment les prémisses et les conclusions de nos règles. Elles sont de la forme $P s$, avec un des relateurs monaires P_x, P_t, P_A (appelés aussi *prédicats*). Les règles qui précèdent donnent déjà à entendre que les autres règles de la formalisation seront de la forme

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_m \Rightarrow \mathfrak{A},$$

où chacun des termes $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_m, \mathfrak{A}$ est une formule $P s_1 \dots s_n$ avec un relateur à n places P et n termes-mots qui suivent. Si on commence à examiner les axiomes et les règles du calcul logique (7.13)-(7.23) à la lumière de cette hypothèse, il semble tout d'abord que l'on puisse procéder sans difficultés. Nous utiliserons un prédicat binaire $P_{<}$, en écrivant donc $P_{<} u v$ au lieu de $u < v$, et nous obtiendrons alors les 12 règles suivantes :

$$(8.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_A u \Rightarrow P_{<} \wedge u \\ P_A u \Rightarrow P_{<} u u \\ P_A u \Rightarrow P_{<} u \vee \\ P_{<} u v, P_{<} v w \Rightarrow P_{<} u w \\ P_{<} w u, P_{<} w v \Rightarrow P_{<} w \Gamma_{\wedge} u v \\ P_{<} w \Gamma_{\wedge} u v \Rightarrow P_{<} w u \\ P_{<} w \Gamma_{\wedge} u v \Rightarrow P_{<} w v \\ P_{<} u w, P_{<} v w \Rightarrow P_{<} \Gamma_{\vee} u v w \\ P_{<} \Gamma_{\vee} u v w \Rightarrow P_{<} u w \\ P_{<} \Gamma_{\vee} u v w \Rightarrow P_{<} v w \\ P_{<} \Gamma_{\wedge} u v w \Rightarrow P_{<} u \Gamma_{\vee} \neg v w \\ P_{<} u \Gamma_{\vee} v w \Rightarrow P_{<} \Gamma_{\wedge} u \neg v w \end{array} \right.$$

Mais une difficulté surgit pour les règles des quantificateurs (7.21) et (7.22) qui manquent encore. Il nous faudra utiliser une symbolique spéciale pour désigner la substitution. De plus, une condition sur les variables est attachée aux règles des quantificateurs, condition que nous n'avons formulée jusqu'ici que dans la langue naïve : y ne doit pas, par exemple, « figurer libre » dans A et x doit être « libre » pour y . Il n'y a cependant pas de difficulté sérieuse à standardiser comme les précédentes les règles dans lesquelles figurent de telles conditions. Il n'y faut qu'un peu de patience.

Pour la substitution, on aura besoin d'un relateur à 4 places :

$$\Sigma x t A B$$

qui doit signifier que la substitution de t à x dans la formule A donne la formule B , soit dans la notation usuelle :

$$x/t A \equiv B.$$

Posons enfin que $N x A$ signifie : x ne figure pas libre dans A et que $\Phi x t A$ signifie : x est libre pour t dans A .

Il s'agit maintenant de définir inductivement ces relations Σ, N, Φ . Nous formulerons nos définitions dans la symbolique habituelle avant de les standardiser. Commençons par $N x A$. La formule A est composée de formules atomiques de la forme $s = t$. Il nous faut donc d'abord définir $N x t$. Mais comme de son côté t est composée de variables de nombres, il nous faut tout d'abord définir $N x y$. Dire alors que la variable x ne figure pas libre dans y , signifie tout simplement que x n'est pas égal à y . Par analogie avec la définition inductive de l'inégalité pour les chiffres 0, 0', 0'', ..., nous poserons pour les variables $\xi, * \xi, ** \xi, \dots$:

$$\begin{aligned} N \xi * x \\ N * x \xi \\ N x y \Rightarrow N * x * y \end{aligned}$$

Pour arriver à la standardisation il nous faut encore remplacer la mention des variables x et y par des conditions $P_x u$ et $P_x v$ pour les mots. Nous obtenons alors :

$$(8.5) \quad \begin{cases} P_x u \Rightarrow N \xi * u \\ P_x u \Rightarrow N * u \xi \\ P_x u, P_x v, N u v \Rightarrow N * u * v \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant poursuivre immédiatement sous forme standard :

$$(8.6) \quad \begin{cases} P_x u \Rightarrow N u 0 \\ N u v \Rightarrow N u 'v \\ N u v, N u w \Rightarrow N u \Gamma_+ v w \\ N u v, N u w \Rightarrow N u \Gamma_\times v w \\ N u v, N u w \Rightarrow N u \Gamma_- v w \\ P_x u \Rightarrow N u \vee \\ P_x u \Rightarrow N u \wedge \\ N u v, N u w \Rightarrow N u \Gamma_\wedge v w \\ N u v, N u w \Rightarrow N u \Gamma_\vee v w \\ N u v \Rightarrow N u \neg v \\ P_x u, P_A v \Rightarrow N u \wedge u v \\ P_x u, P_A v \Rightarrow N u \vee u v \end{cases}$$

Les deux dernières règles expriment qu'une variable x ne figure pas libre dans une formule qui commence par $\wedge_x$ ou par $\vee_x$.

Ceci définit inductivement « ne pas figurer libre ». Passons alors à la définition de ΦxtA , c'est-à-dire à « x est libre pour t dans A ». Si A est une formule qui ne contient aucun quantificateur, en particulier si A est une formule atomique, x est toujours libre pour t dans A . Nous n'exigeons donc pas que x figure réellement dans A . Nous avons en conséquence les règles suivantes :

$$(8.7) \quad \begin{cases} P_x u, P_t v \Rightarrow \Phi u v \vee \\ P_x u, P_t v \Rightarrow \Phi u v \wedge \\ P_x u, P_t v, P_t w_1, P_t w_2 \Rightarrow \Phi u v \Gamma_{=} w_1 w_2 \\ \Phi u v w_1, \Phi u v w_2 \Rightarrow \Phi u v \Gamma_{\wedge} w_1 w_2 \\ \Phi u v w_1, \Phi u v w_2 \Rightarrow \Phi u v \Gamma_{\vee} w_1 w_2 \\ \Phi u v w \Rightarrow \Phi u v \neg w \\ \Phi u v_1 w, N v_2 v_1 \Rightarrow \Phi u v_1 \wedge v_2 w \\ \Phi u v_1 w, N v_2 v_1 \Rightarrow \Phi u v_1 \vee v_2 w \end{cases}$$

Les deux dernières règles expriment que u est libre pour v_1 dans $\wedge v_2 w$ et respectivement dans $\vee v_2 w$, si u est libre pour v_1 dans w et si v_2 ne figure pas libre dans v_1 .

Pour terminer il nous faut définir inductivement les propositions de substitution $\Sigma xtAB$: « la substitution de t à x dans A donne B ». Comme A se compose de formules atomiques et donc de termes, nous commencerons — en utilisant tout d'abord la symbolique usuelle — par :

$$\begin{aligned} x/t x &\equiv t \\ N xt_2 &\Rightarrow x/t_1 t_2 \equiv t_2 \end{aligned}$$

Ceci devient sous forme standard :

$$(8.8) \quad \begin{cases} P_x u_1, P_t u_2 \Rightarrow \Sigma u_1 u_2 u_1 u_2 \\ P_t u_2, N u_1 v \Rightarrow \Sigma u_1 u_2 v v \end{cases}$$

Pour les termes composés et les formules composées, on ajoutera la condition que si l'on substitue dans une composition, il faut commencer par substituer dans les parties. Nous avons donc encore besoin de définir :

$$(8.9) \quad \begin{cases} \Sigma u_1 u_2 v_1 v_2 \Rightarrow \Sigma u_1 u_2 v_1' v_2' \\ \Sigma u_1 u_2 v_1 v_2, \Sigma u_1 u_2 w_1 w_2 \Rightarrow \Sigma u_1 u_2 \Gamma_{+} v_1 w_1 \Gamma_{+} v_2 w_2 \\ \quad \gg \quad \gg \quad \Rightarrow \Sigma u_1 u_2 \Gamma_{\times} v_1 w_1 \Gamma_{\times} v_2 w_2 \\ \quad \gg \quad \gg \quad \Rightarrow \Sigma u_1 u_2 \Gamma_{=} v_1 w_1 \Gamma_{=} v_2 w_2 \\ \quad \gg \quad \gg \quad \Rightarrow \Sigma u_1 u_2 \Gamma_{\wedge} v_1 w_1 \Gamma_{\wedge} v_2 w_2 \\ \quad \gg \quad \gg \quad \Rightarrow \Sigma u_1 u_2 \Gamma_{\vee} v_1 w_1 \Gamma_{\vee} v_2 w_2 \\ \Sigma u_1 u_2 v_1 v_2 \Rightarrow \Sigma u_1 u_2 \neg v_1 \neg v_2 \\ N u_1 u_3, \Sigma u_1 u_2 v_1 v_2 \Rightarrow \Sigma u_1 u_2 \wedge u_3 v_1 \wedge u_3 v_2 \\ N u_1 u_3, \Sigma u_1 u_2 v_1 v_2 \Rightarrow \Sigma u_1 u_2 \vee u_3 v_1 \vee u_3 v_2 \end{cases}$$

La deuxième règle de (8.8) contient déjà les cas

$$\begin{aligned} x/t \wedge_x A &\equiv \wedge_x A \\ x/t \vee_x A &\equiv \vee_x A \end{aligned}$$

puisque $Nx \wedge_x A$ et $Nx \vee_x A$ sont valides.

Ce travail préparatoire nous permet d'exprimer maintenant les règles des quantificateurs (7.21) et (7.22) sous forme standard :

$$(8.10) \begin{cases} \Sigma u_1 u_2 w_1 w_2, \Phi u_1 u_2 w_1, N u_2 v, N u_2 w_1, P_{<} v w_2 \Rightarrow P_{<} v \wedge u_1 w_1 \\ \Sigma u_1 u_2 w_1 w_2, \Phi u_1 u_2 w_1, P_{<} v \wedge u_1 w_1 \Rightarrow P_{<} v w_2 \\ \Sigma u_1 u_2 v_1 v_2, \Phi u_1 u_2 v_1, N u_2 v_1, N u_2 w, P_{<} v_2 w \Rightarrow P_{<} \vee u_1 v_1 w \\ \Sigma u_1 u_2 v_1 v_2, \Phi u_1 u_2 v_1, P_{<} \vee u_1 v_1 w \Rightarrow P_{<} v_2 w \end{cases}$$

Quant à la règle de substitution (7.23), elle doit être formulée comme suit :

$$(8.11) \quad \Sigma u_1 u_2 v_1 v_2, \Sigma u_1 u_2 w_1 w_2, P_{<} v_1 w_1 \Rightarrow P_{<} v_2 w_2$$

Il ne reste plus que les axiomes de Peano (6.1)-(6.9) et nous aurons une formalisation complète de l'arithmétique. Dans (6.2) et dans (6.9) apparaissent des variables de formules et des substitutions, mais celles-ci ne présentent pas de nouvelles difficultés. Nous pouvons donc écrire tout de suite les règles sous forme standard :

$$(8.12) \begin{cases} P_x u \Rightarrow P_{<} \vee \Gamma_{=} u u \\ P_x u_1, P_x u_2, P_A v_1, \Sigma u_1 u_2 v_1 v_2 \Rightarrow P_{<} \Gamma_{\wedge} \Gamma_{=} u_1 u_2 v_1 v_2 \\ P_x u, P_x v \Rightarrow P_{<} \Gamma_{=} 'u' v \Gamma_{=} u v \\ P_x u \Rightarrow P_{<} \Gamma_{=} 'u' 0 \wedge \\ P_x u \Rightarrow P_{<} \vee \Gamma_{=} \Gamma_{+} u 0 u \\ P_x u, P_x v \Rightarrow P_{<} \vee \Gamma_{=} \Gamma_{+} u 'v' \Gamma_{+} u v \\ P_x u \Rightarrow P_{<} \vee \Gamma_{=} \Gamma_{\times} 0 u 0 \\ P_x u, P_x v \Rightarrow P_{<} \vee \Gamma_{=} \Gamma_{\times} 'u' v \Gamma_{+} \Gamma_{\times} u v v \\ P_x u_1, P_t u_2, P_A v_1, \Sigma u_1 u_2 v_1 v_2, \Phi u_1 u_2 v_1, \Sigma u_1 0 v_1 v_0, \\ \Sigma u_1 'u_1' v \Rightarrow P_{<} \Gamma_{\wedge} v_0 \wedge u_1 \Gamma_{\vee} \neg v_1 v v_2 \end{cases}$$

Ces 75 règles (8.1)-(8.12) constituent une formalisation sous forme standard. On y trouve 15 règles pour les variables, les termes et les formules, c'est-à-dire pour P_x, P_t et P_A , 34 règles pour les relations auxiliaires N, Φ, Σ . Il y en a, comme précédemment, 26 pour la dérivation des implications, à savoir 9 axiomes de Peano, 3 axiomes logiques et 14 règles logiques.

Résumons les propriétés caractéristiques d'une formalisation sous forme standard :

- (1) A partir d'un alphabet fini, composé de constantes et de foncteurs à 1, 2, ... places et de variables de mots, on forme des termes.
- (2) A partir des termes, on forme des formules à l'aide de relateurs à 1, 2, ... places.
- (3) Enfin à partir des formules, on forme un nombre fini de règles

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n \Rightarrow \mathfrak{A}.$$

L'une des règles au moins ne contient pas de prémisses, c'est-à-dire que $n = 0$. De telles règles s'appellent aussi des axiomes.

- (4) Dans chacune des règles (3), toutes les variables de mots qui figurent dans la conclusion $\mathfrak{A}$, figurent au moins dans une des prémisses $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n$. (En conséquence les axiomes ne contiennent aucune variable de mots).

On pourrait sans grand dommage laisser tomber cette dernière condition (4), mais elle est commode et toujours satisfaite dans l'exemple que nous donnons d'une formalisation.

Définition 8.1. Un système de règles qui satisfait aux conditions (1) à (4) s'appelle un *calcul standard*.

Nous proposons maintenant d'adopter les calculs standard pour définir le concept de « système formel »¹⁰. Ce qui parle en tous cas en faveur de cette définition, c'est que toutes les formalisations effectuées jusqu'ici la satisfont — à la seule exception de la « semi-formalisation » qui utilise l'induction infinie.

Mais l'induction infinie n'a pas, en vertu de son sens même, à être formulée comme une règle finie standard. Bien plus, qu'elle ne puisse en fait être remplacée sans perdre sa portée (pour dériver des propositions) par un calcul standard, c'est précisément une des conséquences importantes du théorème d'incomplétude de GÖDEL.

Il est probable que la définition que nous venons de donner des systèmes formels ne peut pas être estimée « trop large ». Chacun des pas d'une dérivation dans un calcul standard peut, en effet, être contrôlé avec toute l'exactitude souhaitée. Il est même possible de programmer des machines de telle sorte qu'elles contrôlent les dérivations. Il est d'autre part difficile d'imaginer comment on pourrait étendre le concept, sans que soit détruite cette possibilité de contrôle permanent.

Si le lecteur n'est cependant pas encore convaincu par ces considérations intrinsèques, nous signalerons que (depuis HERBRAND 1931) la recherche d'une

10. *vollformales System*. Cf. note (9).

définition convenable de la formalisation de la logique et des mathématiques modernes a été faite par de nombreux savants, indépendamment les uns des autres. Les conclusions auxquelles ils sont parvenus se présentent sous des aspects variés, mais toutes se sont révélées après coup être équivalentes à la définition proposée. Il s'agit de la « recursive enumerability » de KLEENE 1936 et du concept équivalent — restreint aux fonctions — de la calculabilité de GÖDEL 1934; de la définition combinatoire de ROSSER 1935; de la « λ -definability » de CHURCH 1936 et de la « computability » de TURING 1936 et de POST 1936. La définition que nous avons donnée des calculs standards ne se distingue de celle des « canonical systems » de POST 1943 que par l'usage de la notation de ŁUKASIEWICZ. Il semble donc qu'on soit inéluctablement conduit à ce concept, aussi tôt qu'on cherche à définir mathématiquement l'idée de formalisation. Dans tous les essais consacrés à cette question, personne n'a trouvé une façon pertinente d'élargir véritablement le concept en cause. Même la théorie des algorithmes proposée par MARKOV 1954 s'est révélée être équivalente.

Pour traiter de l'incomplétude du formalisme de Peano, peu importe d'ailleurs comment se justifie notre définition : les calculs standards conduisent de toutes façons à une preuve parfaitement transparente. Toutefois, en raison du fait historique de sa fréquente apparition au cours des années 1934-1954, il importe de légitimer la notion pour saisir la portée des théorèmes d'indécidabilité des systèmes formels et, en particulier, des théories axiomatiques. Ces théorèmes ont été prouvés, à côté de celui de GÖDEL sur l'incomplétude, par CHURCH 1936, par TARSKI 1949 et depuis par plusieurs autres chercheurs.

Pour nous y préparer, nous utiliserons la

Definition 8.2. Soit donné un alphabet α . Nous dirons qu'un ensemble M de mots sur α (c'est-à-dire de mots composés de lettres de cet alphabet) est *énumérable* s'il existe sur l'alphabet α un calcul standard K avec des relateurs $P_0, P_1, P_2, \dots$, dont l'un P_0 est à une place et tels que pour tout mot p sur α , $p \in M$ si et seulement si $P_0 p$ est dérivable dans K .

Si on écrit simplement $\vdash \mathfrak{A}$ pour indiquer qu'une formule $\mathfrak{A}$ est dérivable dans K , on aura :

$$(8.13) \quad p \in M \longleftrightarrow \vdash P_0 p, \quad \text{pour tout mot } p.$$

Nous utilisons ici le long signe $\longleftrightarrow$ pour exprimer l'*équivalence* (ou selon l'interprétation la biconditionnelle) *métamathématique*. La validité doit naturellement toujours être comprise au sens des mathématiques constructives, c'est-à-dire que celui qui soutient (8.13) doit être en mesure de défendre

$\vdash P_0 p$ contre tout opposant qui affirme $p \in M$ (pour un p de son choix) et inversement.

De façon analogue, nous poserons pour les relations à plus d'une place :

Définition 8.3. Une relation à n places R entre des mots sur α est *énumérable* si, pour un calcul standard convenable K sur l'alphabet α avec des relateurs $P_0, P_1, \dots$ dont l'un P_0 est à n places, on a :

$$(8.14) \quad p_1, p_2, \dots, p_n \in R \longleftrightarrow \vdash P_0 p_1 p_2 \dots p_n \text{ pour tous } p_1, \dots, p_n.$$

Comme il est possible de considérer à leur tour les n -uples de mots $p_1, \dots, p_n$ comme des mots (les virgules faisant figure de nouvelle lettre), il suffit en général de se limiter aux ensembles de mots. Ces définitions vont nous permettre de traiter, dans le paragraphe suivant, de la notion de décidabilité.

§ 9. Décidabilité

Soit W_α l'ensemble de tous les mots sur α d'un alphabet α .

Définition 9.1. Un ensemble M de mots sur α est dit *décidable* si M et l'ensemble complémentaire $W_\alpha \setminus M$ sont tous deux énumérables.

Celui qui — pour une raison quelconque — estimerait que le terme choisi de « décidable » convient mal parce qu'il se représente par là (ou par un procédé de décision) quelque chose de plus que la simple énumérabilité d'un ensemble et de son complément, pourrait utiliser un autre terme. La légitimité du concept défini dans (9.1) ne dépend nullement du mot « décidable », mais tient à ce qu'il est proche parent de celui, déjà justifié, d'énumérabilité. Si on s'enlève complètement de la tête la logique classique, on pourra sans plus entendre par « décidabilité » d'un ensemble (de mots) la validité de l'expression :

$$\bigwedge u. u \in M \vee \neg u \in M.$$

Il serait aussi possible d'appeler « procédé de décision » toute stratégie de gain pour cette thèse. La portée de la définition (9.1) tient à ce qu'elle précise l'idée générale de « stratégie de gain » de sorte que des preuves de non-décidabilité deviennent aussi possibles. Aucune preuve de ce genre n'est réalisable avec le concept général. On ne peut, en effet, fournir une stratégie de gain pour aucun ensemble M tel que :

$$\neg \bigwedge u. u \in M \vee \neg u \in M.$$

De fait, cette dernière proposition n'est pas logiquement réfutable, c'est-à-dire

que $\neg \neg \bigwedge_u . u \in M \vee \neg u \in M$ n'est pas logiquement vraie de façon effective. Un dialogue se déroulerait comme suit :

$$\begin{array}{l} \bigwedge_u . u \in M \vee \neg u \in M. \\ p \in M \vee \neg p \in M \end{array} \quad \left\| \begin{array}{l} \neg \bigwedge_u . u \in M \vee \neg u \in M. \\ ? p \\ ? \end{array} \right.$$

C'est le proposant P lui-même qui devrait choisir le mot p . Pour ne pas perdre si l'opposant O proposait $\neg p \in M$, P devrait pouvoir soutenir $p \in M$. Mais personne ne peut alors être certain que l'opposant soit incapable d'en faire autant et qu'il n'aurait donc pas choisi $p \in M$.

La définition 9.1 s'étend mot pour mot aux relations.

Mentionnons encore ici le cas particulier de la décidabilité pour les fonctions :

Définition 9.2. Une fonction f à n arguments (avec des mots pour arguments et pour valeurs) est dite *calculable* si la relation

$$(9.1) \quad \in_{u_1, \dots, u_n, u} f \upharpoonright u_1, \dots, u_n = u$$

est décidable.

Nous reconnaissons qu'on pouvait ici s'attendre à ce qu'un procédé de calcul recouvre autre chose qu'une façon de décider si un mot donné (!) est réellement la valeur de f pour des arguments donnés. Nous allons cependant maintenir le terme consacré dans la définition 9.2. Il faut noter qu'il suffirait d'exiger dans cette définition que la relation (9.1) soit énumérable. On a en effet, pour la relation complémentaire :

$$f \upharpoonright u_1, \dots, u_n \neq u \leftrightarrow \bigvee_v . f \upharpoonright u_1, \dots, u_n = v \wedge u \neq v.$$

La relation complémentaire serait bien aussi énumérable, puisque en appliquant un quantificateur existentiel on conserve l'énumérabilité. La relation serait ainsi décidable.

Si nous avons fait porter le poids sur la notion d'énumérabilité, c'est qu'elle se présente immédiatement dès qu'on se pose le problème de définir mathématiquement la formalisation. On pourrait toutefois renoncer à l'énumérabilité au profit de la calculabilité des fonctions. On a en effet (cf. plus haut, sous 9.1) :

Tout ensemble énumérable est le domaine de valeurs d'une fonction calculable.

Un des avantages qu'il y a à représenter ainsi tous les ensembles énumérables consiste en ce qu'ils le restent si on n'admet qu'une partie des fonctions

calculables, par exemple les fonctions « élémentaires », auxquelles nous serons conduits par la suite. Selon KLEENE 1935, on pourrait aussi se limiter aux fonctions récursives primitives. Il est toutefois préférable, dans une introduction à la métamathématique, de se dispenser d'une étude systématique des fonctions récursives.

Après ces remarques préliminaires sur la notion de décidabilité, venons-en à la preuve de l'indécidabilité du formalisme de Peano, c'est-à-dire de l'ensemble de ses formules dérivables. On en tirera ensuite facilement le théorème d'incomplétude. Comme la preuve s'étendra jusqu'au § 12, donnons-en d'abord un aperçu d'ensemble. Elle part du problème de la représentabilité des ensembles de nombres dans un arithmétique formalisée $\mathfrak{F}$. Dans un formalisme, tout nombre est représenté par un chiffre, par exemple par 0, 0', 0'', ... Dans ce qui suit $\underline{m}$ désignera toujours le représentant de m . Considérons d'autre part une formule A du formalisme. Soit ξ une variable de $\mathfrak{F}$ et soit $A(\underline{m})$ l'expression qui désigne la formule qu'on obtient à partir de A , lorsque on y remplace ξ par $\underline{m}$. On désignera simplement par $\vdash$ la dérivabilité dans $\mathfrak{F}$. Pour toute formule A , on peut alors former l'ensemble des nombres m pour lesquels on a $\vdash A(\underline{m})$. Les ensembles ainsi obtenus sont dits *représentables* en $\mathfrak{F}$. Comme les formules de $\mathfrak{F}$ sont dénombrables — on peut facilement les numéroter : $A_0, A_1, \dots$ et même de telle façon que la correspondance entre une formule et son numéro d'ordre soit décidable — les ensembles représentables en $\mathfrak{F}$ peuvent aussi être dénombrés. Le procédé de la diagonale de CANTOR fournit alors sans plus des ensembles non représentables. Désignons la non-décidabilité (soit $\neg \vdash$) par $\nvdash$. Alors $\in_m \nvdash A_m(\underline{m})$ est déjà un ensemble non représentable. En effet, l'équivalence $\nvdash A(\underline{m}) \longleftrightarrow \vdash A_n(\underline{m})$ pour tout m conduit à la contradiction $\nvdash A_n(\underline{n}) \longleftrightarrow \vdash A_n(\underline{n})$.

La clé d'une preuve d'indécidabilité pour un formalisme $\mathfrak{F}$ repose donc sur la démonstration du théorème suivant :

Tout ensemble décidable de nombres est représentable en $\mathfrak{F}$.

Dès qu'on a ce théorème pour $\mathfrak{F}$ (il ne sera valable que pour certaines formalisations de l'arithmétiques et non pour toutes), le reste s'ensuit facilement. Puisque $\in_m \vdash A_m(\underline{m})$ est énumérable (pour toute formule A , il y a en effet au plus un nombre fini de m tels que $A = A_m(\underline{m})$ et le calcul du système de ces m à partir de A peut aisément être formalisé), l'ensemble complémentaire $\in_m \nvdash A_m(\underline{m})$ ne peut l'être. Ce qu'on cherche, c'est l'indécidabilité de $M = \in_m \vdash A_m$, puisque elle signifie aussi que l'ensemble des formules dérivables, qui sont en correspondance biunivoque et de façon décidable avec les numéros d'ordre, est indécidable. Si alors la numérotation des formules est faite — ce qui est facile — de sorte que la « fonction diagonale » d qui fait correspondre le numéro d'ordre $A_m(\underline{m})$ au nombre m est calculable,

M est indécidable. Si en effet M était décidable, le complément de M serait énumérable et, par l'équivalence

$$\nexists A_m(\underline{m}) \longleftrightarrow \bigvee_n . d \mid m = n \wedge n \notin M,$$

$\in_m \nexists A_m(\underline{m})$ le serait aussi.

Pour préparer la preuve de la représentabilité des ensembles décidables dans certains formalismes, dans celui de Peano par exemple, nous établirons (§ 10) que tout ensemble énumérable de nombres est arithmétiquement réalisable¹¹. La réalisation arithmétique ne se rapporte pas à un formalisme, mais aux moyens d'expression dont dispose le formalisme de Peano.

Définition 9.3. Un ensemble M de nombres est dit *arithmétiquement réalisable*, s'il existe une formule $A(x)$ du formalisme de Peano qui contient une seule variable libre x et telle que la formule

$$(9.2) \quad n \in M \leftrightarrow A(n)$$

soit valide pour tout n , c'est-à-dire qu'on puisse l'établir dans l'arithmétique constructive.

Ceci ne détermine pas encore les instruments dont on dispose pour prouver (9.2). Seuls sont précisés pour l'instant les moyens d'expression et ceux-ci se bornent à l'égalité, à l'addition, à la multiplication et aux particules logiques.

Comme avec (9.2) nous sommes au sein de l'arithmétique constructive, la distinction entre n et $\underline{n}$ est superflue, même gênante. Nous l'abandonnerons.

En guise de nouvelle préparation à la preuve de la réalisation arithmétique des ensembles (de nombres) énumérables, nous allons montrer dans ce paragraphe que, d'une façon générale, les ensembles (de mots) énumérables peuvent être réalisés sous une certaine forme normale. Nous allons en fait distinguer, parmi les relations décidables, les relations « élémentaires décidables », beaucoup plus facile à traiter, et prouver que tout ensemble énumérable M peut se réaliser par :

$$(9.3) \quad u \in M \leftrightarrow \bigvee_v R u v$$

à l'aide d'une relation élémentaire décidable appropriée R .

Nous serons conduits à cette forme normale (9.3) en introduisant encore explicitement dans les calculs standards, non seulement des mots, mais des systèmes (finis) de mots $p_1, \dots, p_n$. Un tel système de mots sera une dériva-

11. L'auteur distingue *vertretbar* et *darstellbar*, adjectifs qui tous deux peuvent signifier « représentable ». J'ai décidé, dans ce qui suit, de rendre le premier adjectif par « représentable » et le second par « réalisable ». Il semble que la différence corresponde au sens logique.

tion, si tout p_j ($j = 1, \dots, n$) est conclusion d'une des règles du calcul standard, sous la condition que seuls les mots p_i avec $i < j$ puissent servir de prémisses. Plus précisément, une telle dérivation sera une *dérivation de p_n* . Si maintenant une relation R est définie de sorte qu'on ait, pour un système $\mathfrak{S}$ de mots et pour un mot p , $\mathfrak{S} R p$ si et seulement si $\mathfrak{S}$ est une dérivation de p , on obtient immédiatement la forme normale (9.3) pour les ensembles de mots dérivables dans le calcul.

Il nous faut examiner cette relation R plus attentivement pour montrer qu'il s'agit d'une relation décidable et nous verrons alors en quel sens elle est « élémentaire décidable ».

Considérons dans ce qui suit un calcul standard K . Introduisons en plus des lettres de son alphabet α , certains relateurs $P_0, P_1, \dots$. Nous les ajoutons à l'alphabet α et nous obtenons ainsi un alphabet élargi α' . Si on utilise les variables de mots $u, v, \dots$ (pour les mots sur α), les « formules » du calcul ne sont rien d'autre que les termes sur l'alphabet α' . Avec des termes sur α' , les règles prennent la forme :

$$s_1, s_2, \dots, s_n \Rightarrow s$$

Ces règles servent à déduire des mots sur α' et seules les variables restent limitées aux mots sur α . Pour introduire maintenant des systèmes de mots sur α' , nous avons besoin de nouveaux foncteurs $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$; Γ_n à n places et $\Gamma_n s_1 s_2 \dots s_n$ désigne le système $s_1, s_2, \dots, s_n$. En élargissant α' à l'aide de $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ (un nombre fini de tels foncteurs suffit), nous obtenons l'alphabet α'' .

Dans ce qui suit, nous utiliserons les lettres $p, q, \dots$ comme variables de mots sur α'' .

Nous devons maintenant définir inductivement l'ensemble des « dérivations » de K comme un ensemble de mots sur α'' . La définition donnée plus haut semble conduire à un système de règles infini, puisqu'elle exige de définir pour tout n les conditions dans lesquelles $\Gamma_n p_1 \dots p_n$ est une dérivation. On arrive cependant à une définition inductive finie en définissant les « dérivations » comme des mots de la forme $\Gamma_{n+1} q p_1 \dots p_n$, où $p_1, \dots, p_n$ sont déjà des dérivations. Cela signifie qu'on aura :

$$\begin{aligned} p_1 &\equiv \Gamma_{n_1+1} q_1 p'_1 p'_2 \dots p'_{n_1} \\ p_2 &\equiv \Gamma_{n_2+1} q_2 p''_1 p''_2 \dots p'_{n_2} \end{aligned}$$

et que q suit immédiatement de $q_1, \dots, q_n$ par une des règles du calcul (voir l'exemple ci-dessous).

Le cas $n = 0$ signifie que, si q est un axiome du calcul, $\Gamma_1 q$ est une dérivation. Remarquons que, en vertu de la standardisation des règles, une règle sans prémisses ne peut contenir de variable.

Une dérivation, écrite de la manière habituelle sous forme d'un arbre

$$\frac{\frac{q_1}{q_2} \quad \frac{q_2 \quad q_1}{q_3} \quad q_4}{q_5}$$

et qui fait passer immédiatement grâce aux axiomes q_1 et q_2 et aux règles de q_1, q_2 à q_3 , de q_1 à q_4 et de q_2, q_3, q_4 à q_5 , conduit à considérer comme des dérivations les mots sur α'' suivants :

$$\begin{aligned} & \Gamma_1 q_1 \\ & \Gamma_1 q_2 \\ & \Gamma_3 q_3 \Gamma_1 q_1 \Gamma_1 q_2 \\ & \Gamma_2 q_4 \Gamma_1 q_1 \\ & \Gamma_4 q_5 \Gamma_1 q_2 \Gamma_3 q_3 \Gamma_1 q_1 \Gamma_1 q_2 \Gamma_2 q_4 \Gamma_1 q_1 \end{aligned}$$

Soit T l'ensemble de ces dérivations en K . Pour exprimer T sous la forme d'un système de règles standard — nous avons en effet l'intention de montrer que T est décidable — nous allons tirer parti de la possibilité de spécifier les sous-mots dont se compose un mot. Tout mot, qui ne se réduit pas à une seule lettre (à une constante), commence par un foncteur, lequel est suivi d'autant de mots qu'il comporte de places. Soit Γ un foncteur à n places et soit p le mot $\Gamma p_1 \dots p_n$. Nous désignerons alors par $\delta_j \wr p$ le sous-mot p_j ($j = 1, \dots, n$).

Nous appellerons ces fonctions δ_j les *fonctions prédécesseurs* et nous admettrons qu'elles contiennent aussi la fonction δ_0 , définie par

$$\delta_0 \wr p \equiv \Gamma.$$

Tout mot composé est donc argument de δ_0 . Si $\delta_0 \wr p$ est un foncteur à n places, les fonctions $\delta_1, \dots, \delta_n$ ont en outre le mot p pour argument. En répétant la fonction prédécesseur, on arrive finalement à décomposer n'importe quel mot en ses lettres. Nous écrirons simplement $\delta_{j_1 j_2} \dots j_m \wr p$ à la place de $\delta_{j_1} \wr \delta_{j_2} \wr \dots \delta_{j_m} p$.

On peut alors, avec ces fonctions prédécesseurs $\delta_{j_1} \dots j_m$ exprimer comme suit la définition de l'ensemble T des dérivations en K :

- (1) $\Gamma_1 q \in T$, pour tout axiome q de K .
- (2) $\Gamma_2 q p_1 \in T$, si $p_1 \in T$ et si q suit immédiatement de $\delta_1 \wr p_1$ par une des règles de K .
- (3) $\Gamma_3 q_1 p_1 p_2 \in T$, si $p_1 \in T, p_2 \in T$ et si q suit immédiatement de $\delta_1 \wr p_1, \delta_1 \wr p_2$ par une règle de K .
- (4) (5), ... de même pour les règles à plus de deux prémisses.

Cette façon de définir T n'exige que la description d'un nombre fini de cas, puisque le calcul K ne comporte qu'un nombre fini de règles. Ainsi le calcul du § 8 ne demande, par exemple, que 7 prémisses au plus.

Montrons encore comment définir l'expression : « q_0 suit immédiatement de $q_1, \dots, q_n$ par la règle $s_1, s_2, \dots \Rightarrow s$ ». Prenons pour exemple la deuxième règle de (8.10) :

$$\Sigma u_1 u_2 w_1 w_2, \Phi u_1 u_2 w_1, P_{<} v \wedge u_1 w_1 \Rightarrow P_{<} v w_2$$

(Ceci s'écrit d'habitude :

$$u_1 / u_2 w_1 \equiv w_2, u_1 \text{ libre pour } u_2 \text{ dans } w_1, v < \wedge u_1 w_1 \Rightarrow v < w_2).$$

Cette règle fournit, par exemple, immédiatement $\vee < 0 = 0$ à partir des prémisses :

$$\xi / 0 \xi = \xi \equiv 0 = 0, \xi \text{ libre pour } 0 \text{ dans } \xi = \xi, \vee_{<} \wedge_{\xi} \xi = \xi.$$

Ainsi sous forme standard, $P_{<} \vee \Gamma_{=} 0 0$ découle immédiatement de

$$\Sigma \xi 0 \Gamma_{=} \xi \xi \Gamma_{=} 0 0, \Phi \xi 0 \Gamma_{=} \xi \xi, P_{<} \vee \wedge \xi \Gamma_{=} \xi \xi.$$

Désignons maintenant les prémisses par q_1, q_2, q_3 et la conclusion par q_0 . Dire alors que q_0 suit immédiatement de q_1, q_2, q_3 par la règle donnée, signifie qu'on a les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \delta_0 \circ q_1 &\equiv \Sigma \\ \delta_0 \circ q_2 &\equiv \Phi \\ \delta_0 \circ q_3 &\equiv P_{<} \\ \delta_0 \circ q_0 &\equiv P_{<} \\ \delta_{02} \circ q_3 &\equiv \wedge \\ \delta_1 \circ q_1 &\equiv \delta_1 \circ q_2 \equiv \delta_{12} \circ q_3 \quad (= \xi, \text{ substitution pour } u_1) \\ \delta_2 \circ q_1 &\equiv \delta_2 \circ q_2 \quad (= 0, \text{ substitution pour } u_2) \\ \delta_3 \circ q_1 &\equiv \delta_3 \circ q_2 \equiv \delta_{22} \circ q_3 \quad (= \Gamma_{=} \xi \xi, \text{ substitution pour } w_1) \\ \delta_4 \circ q_1 &\equiv \delta_2 \circ q_0 \quad (= \Gamma_{=} 0 0, \text{ substitution pour } w_2) \\ \delta_1 \circ q_3 &\equiv \delta_1 \circ q_0 \quad (= \vee, \text{ substitution pour } v). \end{aligned}$$

Il n'est pas nécessaire de donner les substitutions pour les variables elles-mêmes. Ainsi, si la règle est préalablement donnée, le fait que q_0 suit immédiatement de $q_1, \dots, q_n$ peut s'exprimer par un système d'équations de la forme :

$$\delta_{i_1} \dots \delta_{i_{m_1}} \circ q_{k_1} \equiv \delta_{j_1} \dots \delta_{j_{m_2}} \circ q_{k_2} \quad (k_1, k_2 = 0, 1, \dots, n)$$

(On aura éventuellement à droite des lettres de l'alphabet α'). Les règles suffisent ainsi à déterminer univoquement le système d'équations. Les équations entre prédécesseurs sont visiblement décidables et il est possible de définir inductivement, par un système de règles standards, aussi bien les équations que les inéquations. Nous n'allons pas le faire explicitement. On peut, en effet, procéder d'une façon tout à fait semblable à celle par laquelle nous avons défini l'égalité et l'inégalité des nombres et des mots. Il ne vaut pas non plus la peine de prouver spécialement la décidabilité de T au sens où nous l'avons définie jusqu'ici. Il existe, en effet, pour T un procédé de décision en un sens beaucoup plus étroit. Pour décider de $p \in T$, on forme $\delta_0 \cdot p$. Si $\delta_0 \cdot p \equiv \Gamma_1$, $\delta_1 \cdot p$ doit être un axiome. Si $\delta_0 \cdot p \equiv \Gamma_{n+1}$ ($n > 0$), il faut chercher si, pour $\delta_1 \cdot p$ et $\delta_{1,2} \cdot p, \dots, \delta_{1,n+1} \cdot p$, un des systèmes d'équations qui correspond à l'une des règles de K (avec n prémisses) est valide. Dans ce cas, il faut encore décider de $\delta_2 \cdot p \in T, \delta_3 \cdot p \in T, \dots, \delta_{n+1} \cdot p \in T$.

Dans le cas où $\delta_0 \cdot p \equiv \Gamma_{n+1}$, on a donc une équivalence

$$p \in T \leftrightarrow A_n (\delta_2 \cdot p \in T, \dots, \delta_{n+1} \cdot p \in T)$$

où A_n est uniquement composée des formules données et des équations prédécesseurs à l'aide de $\wedge$ et de $\vee$ seulement. Pour décider de $p \in T$, on réitérera l'application de ces équivalences. La décision sera ainsi ramenée des sous-mots de p à leurs sous-mots, et ainsi de suite. Et ce n'est que si le procédé se termine par des décisions évidemment positives (parce que certains sous-mots sont des axiomes) qu'on aura $p \in T$.

Comme K n'a qu'un nombre fini de règles et que, en conséquence, le nombre des prémisses est borné, on aura en général l'équivalence :

$$\begin{aligned} p \in T \leftrightarrow & \delta_0 \cdot p \equiv \Gamma_1 \wedge A_0 \\ & \vee \delta_0 \cdot p \equiv \Gamma_2 \wedge A_1 (\delta_2 \cdot p \in T) \\ & \vee \delta_0 \cdot p \equiv \Gamma_3 \wedge A_2 (\delta_2 \cdot p \in T, \delta_3 \cdot p \in T) \\ & \vee \dots \end{aligned}$$

que nous écrirons simplement :

$$p \in T \leftrightarrow A(p; T).$$

Cette expression A est aussi uniquement composée de formules $\delta_j \cdot p \in T$ et d'équations prédécesseurs de p , reliées par $\wedge$ et $\vee$. Nous ne ferons cependant pas usage de ce que la négation n'y figure pas et nous nous contenterons de poser la définition suivante pour des relations quelconques entre mots :

Définition 9.3. Une relation R entre mots est *élémentaire-décidable*, s'il existe une équivalence

$$p_1, \dots, p_n \in R \leftrightarrow A(p_1, \dots, p_n; R)$$

où A est une formule de la logique des joncteurs, composée d'équations prédécesseurs de $p_1, \dots, p_n$ et de certaines formules $q_1, \dots, q_n \in R$, avec comme systèmes d'arguments $q_1, \dots, q_n$ des systèmes de prédécesseurs de $p_1, \dots, p_n$.

Il est d'ailleurs avantageux d'admettre la négation. Il découle en effet de la définition 9.3 que la relation R' , complémentaire de R , est élémentaire-décidable avec elle. Il suffit pour le voir de former la négation de A et donc de remplacer dans A chacune des formules $q_1, \dots, q_n \in R$ par $\neg q_1, \dots, \neg q_n \in R'$.

L'ensemble des dérivations nous fournit pour l'ensemble M des mots dérivables la définition suivante :

$$(9.4) \quad q \in M \leftrightarrow \bigvee_p \cdot p \in T \wedge \delta_1 \cdot p \equiv q.$$

Nous écrirons pRq (p est une dérivation de q) au lieu de $p \in T \wedge \delta_1 \cdot p \equiv q$. Puisque $p \in T \leftrightarrow pR\delta_1 \cdot p$, R est donc toujours une relation élémentaire-décidable et nous sommes ainsi parvenus à la forme normale (9.3).

Comme la relation R que nous avons obtenue est univoque à droite (pRq implique en effet $q \equiv \delta_1 \cdot p$), M est le domaine de valeurs d'une fonction.

Définition 9.4. Une fonction à n places f est dite *élémentaire-calculable* si la relation

$$\in_{u_1, \dots, u_n, v} f \cdot u_1, \dots, u_n = v$$

est élémentaire-décidable.

Réunissons ces résultats et généralisons-les en même temps aux relations :

Théorème 8.1. Toute relation énumérable M peut être réalisée sous la forme normale suivante à l'aide d'une relation R élémentaire-décidable :

$$u_1, \dots, u_n \in M \leftrightarrow \bigvee_v vRu_1, \dots, u_n.$$

En particulier, tout ensemble énumérable M peut être réalisé par le domaine de valeurs d'une fonction f (à une place) élémentaire-calculable :

$$u \in M \leftrightarrow \bigvee_v f \cdot v = u.$$

Ce théorème nous permettra de traiter, dans les paragraphes suivants la réalisation arithmétique des ensembles énumérables.

§ 10. Réalisation arithmétique

Il est évident que tout ensemble énumérable est représentable dans un formalisme approprié (savoir par $P_0 u$), puisque c'est tout justement ainsi que sont définis les ensembles énumérables. Mais nous voulons plus et nous prétendons que certains formalismes sont universels, c'est-à-dire que tous les ensembles énumérables y sont représentables. Ce n'est pas un hasard s'il existe précisément des formalismes arithmétiques universels. Comme il existe une infinité de nombres, tous les mots d'un alphabet pourront toujours être représentés par des nombres. Les chiffres 0, '0, ''0, ... constituent d'ailleurs l'ensemble infini de mots, qui est le plus facile à construire. Et ce n'est que grâce à cette simplicité que l'arithmétique joue en métamathématique (et du reste ailleurs aussi) un rôle privilégié.

Il est facile d'obtenir de diverses façons une correspondance biunivoque décidable entre les mots d'un alphabet, constitué d'un nombre fini de constantes et de foncteurs d'une part et les nombres d'autre part. En s'inspirant des travaux de GÖDEL, on commence le plus souvent par faire correspondre aux lettres de l'alphabet les nombres impairs successifs. Ceux-ci sont déjà les « nombres de Gödel » des constantes. Si $q_1, \dots, q_r$ sont des mots, auxquels on a déjà fait correspondre les nombres de Gödel $\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_r$, alors au mot $q \equiv \Gamma q_1 \dots q_r$ correspondra le nombre de Gödel

$$\tilde{q} = \pi_0^{n_0} \pi_1^{\tilde{q}_1} \dots \pi_r^{\tilde{q}_r},$$

où n_0 est le nombre impair qui correspond à Γ et où $\pi_0, \pi_1, \dots$ désigne la suite des nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11, ... Pour décider si un nombre n est le nombre de Gödel d'un mot — et si oui, de quel mot — il faut décomposer n en facteurs premiers :

$$n = \pi_0^{n_0} \pi_1^{n_1} \dots \pi_r^{n_r}.$$

Si n est impair, c'est-à-dire si $n_0 = 0$, n peut être le nombre de Gödel d'une constante. Si $n_0 > 0$ et si n_0 correspond à un foncteur à r places Γ , il faut examiner si les nombres $n_1, \dots, n_r$ sont des nombres de Gödel. Si tel est le cas et si, disons, $n_1 = \tilde{q}_1, \dots, n_r = \tilde{q}_r$, n est alors le nombre de Gödel de $\Gamma q_1 \dots q_r$.

Cette correspondance biunivoque entre mots et nombres permet encore d'*arithmétiser* toutes les relations et les fonctions entre mots.

Si R est une relation entre mots à r places, on définira la relation $\tilde{R}$ à r places entre nombres en posant qu'on doit avoir $n_1, \dots, n_r \in \tilde{R}$ pour tous

systèmes de nombres de Gödel $n_1 = \tilde{q}_1, \dots, n_r = \tilde{q}_r$ tels que $q_1, \dots, q_r \in R$ et pour eux seulement.

R est une relation arithmétique. Nous appellerons *arithmétiquement énumérables* les relations arithmétiques $\tilde{R}$ qui proviennent de relations R énumérables. Puisque la numération de Gödel est décidable, les relations arithmétiquement énumérables, en tant que relations entre les noms de nombres 0, '0, ''0, ... sont aussi énumérables. Cependant, toute relation entre noms de nombres n'est pas arithmétiquement énumérable. Ainsi, par exemple, l'ensemble de tous les chiffres impairs ne l'est déjà pas. Dans le cas d'un alphabet fini, en effet, on n'a qu'un nombre fini de chiffres impairs qui sont nombres de Gödel. Partons alors d'une relation entre nombres. Il nous faut réaliser les nombres par 0, '0, ''0, ... et former leurs nombres de Gödel. Disons qu'on aura :

$$\begin{aligned}\tilde{0} &= 1 \\ \tilde{'0} &= 2^3 3^1 \\ \tilde{''0} &= 2^3 3^2 3^1 \\ &\dots\end{aligned}$$

Une relation R entre chiffres est alors énumérable si et seulement si la relation correspondante $\tilde{R}$ entre ces nombres de Gödel est arithmétiquement énumérable.

La numération de Gödel fait aussi correspondre des fonctions arithmétiques aux fonctions prédécesseurs $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots$. Nous les désignerons de nouveau par $\tilde{\delta}_0, \tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2, \dots$. On aura alors :

$$\begin{aligned}n &= \pi_0^{\pi_0} \pi_1^{\pi_1} \pi_2^{\pi_2} \dots \pi_r^{\pi_r} \\ \tilde{\delta}_0 \upharpoonright n &= n_0, \quad \tilde{\delta}_1 \upharpoonright n = n_1, \dots, \tilde{\delta}_r \upharpoonright n = n_r.\end{aligned}$$

Dans la numération de Gödel, les fonctions prédécesseurs arithmétiques sont simplement les exposants de la décomposition en facteurs premiers. Mais seuls les nombres de Gödel des mots composés figurent comme arguments.

Cherchons maintenant des réalisations arithmétiques pour les relations arithmétiquement énumérables $\tilde{R}$. Il nous faut donc chercher des formules $A(x_1, \dots, x_r)$ du formalisme de Peano, telles que $n_1, \dots, n_r \in \tilde{R}$ si et seulement si on a $A(n_1, \dots, n_r)$ au sein de l'arithmétique constructive.

La forme normale du théorème 9.1 permet de se limiter à la réalisation arithmétique des relations élémentaires-décidables. Puisque les fonctions prédécesseurs jouent un rôle important dans la définition de la décidabilité élémentaire, nous commencerons par la réalisation des fonctions prédécesseurs arithmétiques $\tilde{\delta}_0, \tilde{\delta}_1, \dots$.

D'après leur définition, on a :

$$(10.1) \quad \delta_j \mid n = m \leftrightarrow \pi_j^m \mid n \wedge \neg \pi_j^{m+1} \mid n$$

La relation de divisibilité $\mid$ qui figure ici se définit à son tour par :

$$l \mid n \leftrightarrow \exists_k k \cdot l = n.$$

Malgré la présence, dans cette réalisation, d'un quantificateur existentiel $\exists_k$, la relation de divisibilité n'est évidemment pas seulement énumérable, mais elle est décidable. Cela tient au fait que, pour décider de $l \mid n$, il n'est pas nécessaire d'examiner tous les nombres k pour savoir s'il s'en trouve un tel que $k \cdot l = n$. Seuls doivent être essayés les nombres $k \leq n$. On a donc la réalisation suivante :

$$(10.2) \quad l \mid n \leftrightarrow \exists_k k \leq n \wedge k \cdot l = n.$$

D'une façon générale, nous écrirons maintenant

$$\bigvee_n A(k) \text{ au lieu de } \exists_k k \leq n \wedge A(k)$$

et nous appellerons $\bigvee_n$ un *quantificateur existentiel restreint*.

De façon duale, nous définirons les *quantificateurs universels restreints* par :

$$\bigwedge_n A(k) \Leftrightarrow \bigwedge_k k \leq n \vee A(k).$$

Ces quantificateurs restreints joueront un rôle important par la suite.

Il va de soi que la relation d'ordre $\leq$ est arithmétiquement réalisable à l'aide de :

$$k \leq l \leftrightarrow \exists_i k + l = n.$$

De plus (10.1) et (10.2) fournissent l'équivalence :

$$(10.3) \quad \delta_j \mid n = m \leftrightarrow \bigvee_n k \cdot \pi_j^m = n \wedge \neg \bigvee_n k \cdot \pi_j^{m+1} = n.$$

Ceci n'est pas une réalisation arithmétique, puisque à droite figure encore le terme π_j^m qui n'appartient pas au formalisme de Peano. Si on remplace (10.3) par

$$(10.4) \quad \delta_j \mid n = m \leftrightarrow \bigvee_n \pi_j^m = l \wedge \bigvee_n l = n \wedge \neg \bigvee_n k \cdot (l \cdot \pi_j) = n.$$

il reste encore à réaliser, par l'addition et la multiplication, les relations

exponentielles $\in_{m,n} \pi^m = n$ pour les nombres premiers π . La chose peut se faire en s'appuyant sur l'équivalence :

$$\pi^m = n \leftrightarrow m = 0 \wedge n = 1 \vee \pi \cdot \pi^{m-1} = n.$$

Il vient enfin :

$$(10.5) \quad \pi^m = n \leftrightarrow m = 0 \wedge n = 1 \vee \bigvee_k \pi \cdot k = n \wedge \pi^{m-1} = k.$$

Il s'agit-là d'une équivalence du type de celle qu'on exige pour la décidabilité arithmétique. Si l'on prend les chiffres 0, '0, ''0, ... comme mots, on obtient un prédécesseur au sens de la définition 9.3 en laissant tomber un signe '. En ce sens, $m-1$ est donc un prédécesseur de m . Le membre de droite de (10.5) n'est toutefois pas composé à l'aide de la seule logique des joncteurs. Il contient encore des quantificateurs restreints. Il n'y a pour la réalisation aucune difficulté à employer la formule multiplicative à la place des « équations prédécesseurs » de la définition 9.3. Nous allons en effet tout ramener à l'addition et à la multiplication.

Éliminons encore les termes $m-1$ de (10.5). On obtient :

$$(10.6) \quad \pi^m = n \leftrightarrow m = 0 \wedge n = 1 \vee \bigvee_n \bigvee_m \pi \cdot k = n \wedge l + 1 = m \wedge \pi^l = k.$$

Pour rendre la nouvelle situation calculable, nous utiliserons la

Définition 10.1. Une relation $\tilde{R}$ est dite *réalisable au sens restreint*, s'il existe une formule $A(x_1, \dots, x_r)$, obtenue à partir des formules primitives du formalisme de Peano à l'aide des seuls joncteurs et des quantificateurs restreints et telle que $n_1, \dots, n_r \in \tilde{R} \leftrightarrow A(n_1, \dots, n_r)$ pour tout $n_1, \dots, n_r$.

Nous appellerons *formules restreintes* du formalisme de Peano, les formules $A(x_1, \dots, x_r)$ qui apparaissent ici. Il n'y figure que des quantificateurs $\bigwedge_z, \bigvee_z$ pour lesquels nous poserons la condition que la variable z n'est pas mentionnée dans le terme t . (Ainsi, $\bigwedge_z z$, par exemple, ne serait pas un quantificateur restreint).

On voit tout de suite que seules les relations décidables sont réalisables au sens restreint. Toutefois la réciproque n'est pas vraie, ainsi que le lecteur intéressé pourra s'en assurer au §57 de KLEENE 1952. Nous allons toutefois montrer que les relations élémentaires-décidables, dans la forme normale du théorème 9.1 sur les relations arithmétiquement énumérables, peuvent être remplacées par des relations réalisables au sens restreint.

Définition 10.2. Une équivalence valide

$$n_1, \dots, n_r \in \tilde{R} \leftrightarrow \bigvee_m A(m; n_1, \dots, n_r)$$

dans laquelle $A(x; y_1, \dots, y_r)$ est une formule restreinte du formalisme de Peano s'appelle une *réalisation arithmétique normale* de $\tilde{R}$.

Il suffira de montrer que les relations élémentaires décidables possèdent une réalisation arithmétique normale. Par le théorème 9.1, les relations arithmétiquement énumérables auront donc aussi une réalisation arithmétique normale.

La réalisation arithmétique normale des relations élémentaires décidables en exige d'abord une pour les relations exponentielles $\in_{m,n} \pi^m = n$.

Nous allons résoudre le problème en nous inspirant des travaux de GÖDEL. Ce dernier a introduit une fonction spéciale qu'il a nommée la fonction β . Nous pourrions transposer la réalisation aux relations élémentaires décidables en utilisant une relation β analogue. L'idée centrale de la preuve est la suivante. On considère la fonction caractéristique χ de la relation $\in_{m,n} \pi^m = n$. Celle-ci est définie par :

$$\chi \vdash m, n = \begin{cases} 1, & \text{si } \pi^m = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par (10.5), $\chi \vdash m, n$ est univoquement déterminée si $\chi \vdash m - 1, k$ est donnée pour $k \leq n$. Ordonnons, par un dénombrement diagonal, les nombres

$$\begin{array}{cccc} \chi \vdash 0,0 & \chi \vdash 0,1 & \chi \vdash 0,2 & \dots \\ \chi \vdash 1,0 & \chi \vdash 1,1 & \chi \vdash 1,2 & \dots \\ \chi \vdash 2,0 & \chi \vdash 2,1 & \dots & \\ & \dots & & \end{array}$$

en une suite :

$$\chi \vdash 0,0 ; \chi \vdash 1,0 ; \chi \vdash 0,1 ; \chi \vdash 2,0 ; \chi \vdash 1,1 ; \dots$$

Il suit alors de (10.5) que chacun de ces nombres est univoquement déterminé par tous ceux qui le précèdent.

Si $\langle m, n \rangle$ désigne le nombre

$$2 \left[\binom{m+n+1}{2} + n + 1 \right],$$

$\langle m, n \rangle$ fournira le double du numéro d'ordre de $\chi \vdash m, n$ dans la suite. $\langle m, n \rangle$ est un polynôme en m et n , savoir $(m+n)^2 + m + 3n + 2$. Il est donc réalisable par un terme du formalisme de Peano.

Posons maintenant :

$$\beta_{ij}(m, n) \Leftrightarrow \langle m, n \rangle i + 1 \mid j$$

Cette relation β est réalisable au sens restreint. D'autre part, pour tout m et n on a des i et j appropriés tels que :

$$(10.7) \quad \beta_{ij}(k, l) \leftrightarrow \pi^k = l \text{ pour tous } k \leq m \text{ et } l \leq n.$$

Preuve : Posons $i = \langle m, n \rangle !$ (! désigne la factorielle) et

$$j = \prod_{\substack{0,0 \\ m,n}}^{m,n} (\langle k, l \rangle i + 1)^{\pi^k, l}.$$

Il suffit de montrer que tous les facteurs de j sont premiers entre eux, ce qui découle de ce qu'un diviseur premier π' de deux facteurs distincts de j diviserait aussi la différence $(\langle k_1, l_1 \rangle - \langle k_2, l_2 \rangle) i$. Comme ici le premier facteur, pris en valeur absolue, est $\leq \langle m, n \rangle$, il diviserait i et le nombre premier π' diviserait aussi i , ce qui est en contradiction avec le fait que π' devrait être diviseur des nombres de la forme $\langle k, l \rangle i + 1$.

De son côté (10.6) donne :

$$(10.8) \quad \begin{aligned} \pi^m = n &\leftrightarrow \bigvee_{i,j} \beta_{i,j}(m, n) \wedge \bigwedge_{\substack{k,l \\ m,n}} \beta_{ij}(k, l) \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow k = 0 \wedge l = 1 \vee \bigvee_k \bigvee_l \pi^k \cdot l_0 = l \wedge k_0 + 1 = k \wedge \beta_{ij}(k_0, l_0) \dots \end{aligned}$$

Preuve : Si on a $\pi^m = n$, nous prendrons i et j comme ci-dessus. On aura alors, par (10.7), $\beta_{ij}(m, n)$ et de plus, en vertu de (10.6), on aura aussi la seconde conjonction du membre de droite de (10.8).

Inversement, si le second membre est donné, $\beta_{ij}(k, l)$ satisfait tout justement l'équivalence qui doit, selon (10.6), être satisfaite pour $\pi^k = l$. Et puisque, par cette équivalence, la validité de $\pi^k = l$ est univoquement déterminée, on aura (10.7). Donc, si le membre de droite est valide, $\pi^m = n$ l'est aussi.

La réalisation (10.8) ne se distingue d'une réalisation arithmétique normale qu'en ce qu'elle commence par deux quantificateurs existentiels au lieu d'un seul. La formule qui suit les quantificateurs existentiels, $B(i, j, m, n)$ est bien équivalente — en vertu de la réalisation au sens restreint de la relation β — à une formule restreinte. Et comme on peut sans plus remplacer

$$\begin{aligned} &\bigvee_{i,j} B(i, j, m, n) \\ \text{par} &\bigvee_h \bigvee_i \bigvee_j \cdot h = \langle i, j \rangle \wedge B(i, j, m, n), \end{aligned}$$

la réalisation normale de la relation exponentielle est établie.

Si on introduit dans (10.4) des réalisations normales de la forme :

$$\pi_j^m = n \leftrightarrow \bigvee_h B_j(h, m, n)$$

on obtient

$$\delta_j, n = m \leftrightarrow \bigvee_l \cdot \bigvee_n B_j(h, m, l) \wedge C_j(l, n),$$

$$\text{et donc} \quad \delta_j, n = m \leftrightarrow \bigvee_h \bigvee_l \cdot B_j(h, m, l) \wedge C_j(l, n).$$

On a ainsi de plus des réalisations arithmétiques normales pour les relations prédécesseurs arithmétiques.

Il est facile de transposer ces considérations à la réalisation normale de n'importe quelles relations élémentaires décidables. Il faut, pour une relation à r places, utiliser une relation :

$$\beta_{ij}(m_1, \dots, m_r) \Leftrightarrow \langle m_1, \dots, m_r \rangle i + 1 | j$$

avec

$$\begin{aligned} \langle m_1, m_2, m_3 \rangle &= \langle \langle m_1, m_2 \rangle, m_3 \rangle \\ \langle m_1, m_2, m_3, m_4 \rangle &= \langle \langle m_1, m_2, m_3 \rangle, m_4 \rangle \\ &\dots \end{aligned}$$

Pour $r = 1$, on posera simplement $\langle m \rangle = m + 1$.

Soit $\tilde{R}$ une relation élémentaire décidable. On a alors l'équivalence :

$$(10.9) \quad n_1, \dots, n_r \in \tilde{R} \leftrightarrow A(n_1, \dots, n_r; \tilde{R})$$

Dans A se trouvent des équations prédécesseurs et, comme arguments de $\tilde{R}$, ne figurent à droite que des systèmes $m_1, \dots, m_r$ qui précèdent $n_1, \dots, n_r$ en ce sens que m_1 est un prédécesseur de n_1 (éventuellement $= n_1$), m_2 est un prédécesseur de n_2 (éventuellement $= n_2$), et ainsi de suite. Mais une fois au moins figure un prédécesseur réel.

On a de nouveau, pour i et j appropriés :

$$(10.10) \quad \beta_{ij}(k_1, \dots, k_r) \leftrightarrow k_1, \dots, k_r \in \tilde{R} \\ \text{pour tous } k_1 \leq n_1, \dots, k_r \leq n_r$$

et on obtient :

$$(10.11) \quad n_1, \dots, n_r \in \tilde{R} \leftrightarrow \bigvee_{i,j} \cdot \beta_{ij}(n_1, \dots, n_r) \wedge \bigwedge_{n_1, \dots, n_r}^{k_1, \dots, k_r} \cdot \\ \beta_{ij}(k_1, \dots, k_r) \leftrightarrow A(k_1, \dots, k_r; \beta_{ij})..$$

Si dans (10.11), on remplace tous les prédécesseurs qui se présentent par des relations prédécesseurs selon le schéma :

$$B(\delta \mid m) \leftrightarrow \bigvee_m \delta \mid m = m_0 \wedge B(m_0),$$

et si on remplace ces dernières par leur réalisation normale, on aboutit à une réalisation arithmétique normale :

$$n_1, \dots, n_r \in \tilde{R} \leftrightarrow \bigvee_h C(h, n_1, \dots, n_r).$$

Finalement, on obtient à l'aide du théorème 9.1, le

Théorème 10.1. Toute relation arithmétique énumérable $\tilde{R}$ a une réalisation arithmétique normale :

$$n_1, \dots, n_r \in \tilde{R} \leftrightarrow \bigvee_h C(h, n_1, \dots, n_r)$$

avec une formule restreinte C du formalisme de Peano.

Il suffit de nouveau, pour prouver le théorème, de réduire le quantificateur existentiel de la forme normale du théorème 9.1 et le quantificateur existentiel de la réalisation arithmétique normale à la relation élémentaire décidable qui en découle par le schéma :

$$\bigvee_i \bigvee_j \dots \leftrightarrow \bigvee_h \bigvee_i \bigvee_j \dots h = \langle i, j \rangle \wedge \dots$$

Il est encore possible de spécialiser davantage la formule restreinte du théorème 10.1 (voir, par exemple, DAVIS 1958), mais ceci n'offre aucun avantage pour la preuve que nous allons donner au §11.

§ 11. Représentation arithmétique

Nous allons maintenant passer de la réalisation arithmétique normale des relations énumérables, et en particulier des relations décidables, à leur représentation dans le formalisme de Peano. Il nous faut pour cela considérer d'abord les relations réalisables au sens restreint. On se doute bien qu'une relation $\tilde{R}$, qui est réalisable par une formule restreinte $A(x_1, \dots, x_r)$, est aussi représentable par cette même formule, c'est-à-dire qu'on a :

$$(11.1) \quad n_1, \dots, n_r \in \tilde{R} \longleftrightarrow \vdash A(\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_r)$$

pour tous les nombres $n_1, \dots, n_r$.

En fait, la preuve n'offre aucune difficulté et nous en profiterons pour

examiner ce qui est réellement utilisé des axiomes de Peano. Il apparaîtra alors que le schéma d'induction peut être remplacé par l'axiome suivant :

$$(11.2) \quad x = 0 \vee \exists y x = y'$$

ainsi que R. M. ROBINSON 1950 est le premier à l'avoir remarqué. Bien entendu, le *formalisme de Robinson* qui résulte de cette substitution est en général trop faible pour remplacer le formalisme de Peano. Il ne formalise qu'un fragment de l'arithmétique et on ne peut, par exemple, plus même y déduire $\neg x = x'$. Pour prouver cette non-dérivabilité, on montrera que tous les axiomes du formalisme de Robinson sont satisfaits, si on ajoute aux nombres naturels un nouvel élément ∞ , pour lequel on pose :

$$\begin{aligned} \infty' &= \infty \\ \infty + n &= n + \infty = \infty \\ \infty \cdot 0 &= 0 \cdot \infty = 0 \\ \infty \cdot n &= n \cdot \infty = \infty \text{ pour } n \neq 0. \end{aligned}$$

Puisque ce « modèle » ne satisfait pas le théorème $\bigwedge_x \neg x = x'$ (on a, en effet, $\infty = \infty'$), ce théorème ne saurait se déduire des axiomes, en vertu de la consistance de la logique classique, démontrée au §3.

Toutefois, pour la représentation que nous considérons ici, le formalisme de Robinson sera un système d'axiomes arithmétiques suffisant.

Nous allons prouver la représentation en remplaçant (11.1) par les (méta-) implications suivantes :

$$(11.3) \quad \begin{cases} n_1, \dots, n_r \in \tilde{R} \longrightarrow \vdash A(\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_r) \\ n_1, \dots, n_r \notin \tilde{R} \longrightarrow \vdash \neg A(\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_r). \end{cases}$$

Comme $\neg A$ est une formule restreinte en même temps que A , la seconde implication n'est encore qu'une thèse partielle de représentation. Il suffit cependant de prouver (11.3) pour pouvoir conclure à (11.1). Si on a, en effet, $\vdash A(\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_r)$, on ne peut avoir, sous les hypothèses de (11.3), $n_1, \dots, n_r \notin \tilde{R}$. Sinon on aurait $\vdash \neg A(\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_r)$ et le formalisme serait inconsistent. Mais si on n'a pas (en arithmétique constructive!) $n_1, \dots, n_r \notin \tilde{R}$, on doit avoir $n_1, \dots, n_r \in \tilde{R}$, puisque $\tilde{R}$ est décidable en tant qu'il s'agit d'une relation réalisable au sens restreint. Ainsi les deux réciproques de (11.3) sont aussi valables. Nous appellerons en conséquence cette représentation une *représentation fidèle pour la négation*¹².

12. En allemand *negationstreue Vertretbarkeit*. Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté possible, je traduirai simplement par « représentation fidèle ».

Nous commencerons la preuve de (11.3) par les formules primitives :

$$(11.4) \quad m = n \longrightarrow \vdash \underline{m} = \underline{n}.$$

Preuve : Pour $m = n$, l'axiome $x = x$ donne $\vdash \underline{m} = \underline{n}$.

$$(11.5) \quad m \neq n \longrightarrow \vdash \neg \underline{m} = \underline{n}.$$

Preuve : Pour $m \neq n$ on a soit $m > n$ soit $m < n$. Dans le cas où $m > n$, on aura à partir de l'axiome $x' = y' < x = y$ en n pas : $\underline{m} = \underline{n} < \underline{m} - \underline{n} = 0$. Il suit alors de l'axiome $x' = 0 < \wedge$ que $\vdash \neg \underline{m} = \underline{n}$. On procède de même pour le cas $m < n$.

Remarquons que dans cette preuve, comme dans la suivante, on utilise bien $\vdash$ pour désigner la déductibilité d'une formule A , c'est-à-dire la déductibilité de l'implication $\forall < A$. Toutefois nous n'exprimons pas la déductibilité d'une implication en la faisant précéder de $\vdash$. Nous nous bornons à écrire l'implication elle-même. Il s'ensuit que le signe $<$ marque la déductibilité de l'implication.

Puisque $\underline{m}' = \underline{m}'$, (11.4) et (11.5) fournissent aussi :

$$(11.6) \quad \begin{cases} m' = n \longrightarrow \vdash \underline{m}' = \underline{n} \\ m' \neq n \longrightarrow \vdash \neg \underline{m}' = \underline{n} \end{cases}$$

De plus on a :

$$(11.7) \quad k + m = n \longrightarrow \vdash \underline{k} + \underline{m} = \underline{n}.$$

Preuve par induction sur m (au niveau de la métalangue) :

Pour $m = 0$, $\vdash \underline{k} + \underline{m} = \underline{n}$ résulte de l'axiome $x + 0 = x$. De $k + m' = n$ découle $k + m = n_0$, avec $n'_0 = n$. Si on a $\vdash \underline{k} + \underline{m} = \underline{n}_0$ par hypothèse d'induction, l'axiome $x + y' = (x + y)'$ fournit, en liaison avec (11.6) et l'axiome d'égalité : $\vdash \underline{k} + \underline{m}' = \underline{n}$.

$$(11.8) \quad k + m \neq n \longrightarrow \vdash \neg \underline{k} + \underline{m} = \underline{n}.$$

Preuve : De $k + m \neq n$ suit $\forall l. k + m = l \wedge l \neq n$. On a donc, par (11.5) et (11.7) :

$$\vdash \underline{k} + \underline{m} = \underline{l} \quad \text{et} \quad \vdash \neg \underline{l} = \underline{n} \quad \text{pour un certain } l.$$

Les axiomes d'égalité donnent :

$$\underline{k} + \underline{m} = \underline{l} \wedge \underline{k} + \underline{m} = \underline{n} < \underline{l} = \underline{n}$$

donc $\vdash \neg \underline{k} + \underline{m} = \underline{n}$.

Les preuves pour la multiplication

$$(11.9) \quad \begin{cases} k \cdot m = n \longrightarrow \vdash \underline{k} \cdot \underline{m} = \underline{n} \\ k \cdot m \neq n \longrightarrow \vdash \neg \underline{k} \cdot \underline{m} = \underline{n} \end{cases}$$

se déroulent de façon semblable.

Pour conclure de ce qui précède à la représentation fidèle de n'importe quelle formule primitive, il faut tout d'abord montrer inductivement que, de l'hypothèse que les équations $s = x$ et $t = y$ sont des représentations fidèles, il s'ensuit que $s' = z$, $s + t = z$ et $s \cdot t = z$ le sont aussi. On ne fera usage pour cela que des axiomes d'égalité. La représentation fidèle de n'importe quelle formule primitive $s = t$ va alors de soi.

Pour préparer la représentation de la relation d'ordre $x \leq y$ par la formule $\bigvee_z z + x = y$, nous remarquerons d'abord que :

$$(11.10) \quad \vdash x + y^{(n)} = (x + y)^{(n)},$$

où on a écrit (n) pour indiquer n accents '.

Preuve par induction sur n : $x + y' = (x + y)'$ est un axiome de même que $x + y^{(n+1)} = (x + y^{(n)})'$. Il suit donc de l'hypothèse d'induction et des axiomes d'égalité que :

$$\vdash x + y^{(n+1)} = (x + y)^{(n+1)}.$$

En particulier pour $y = 0$, on a par (11.10) :

$$(11.11) \quad \vdash x + \underline{n} = x^{(n)}.$$

Nous obtenons maintenant :

$$(11.12) \quad m \leq n \longrightarrow \vdash \bigvee_z z + \underline{m} = \underline{n}.$$

Preuve : De $m \leq n$ suit $\bigvee_k k + m = n$ et donc par (11.7) :

$$\vdash \underline{k} + \underline{m} = \underline{n}, \text{ pour un certain } k.$$

D'où il suit logiquement $\bigvee_z z + \underline{m} = \underline{n}$.

$$(11.13) \quad m \not\leq n \longrightarrow \vdash \neg \bigvee_z z + \underline{m} = \underline{n}.$$

Preuve : De $m \not\leq n$ suit $n < m$ et donc $\bigvee_k k' + n = m$. On obtient par (11.11) :

$$\begin{aligned} z + \underline{m} = \underline{n} &< z^{(m)} = \underline{n} \\ &< z^{(k'+n)} = \underline{n} \\ &< z^{(k')} = 0 \quad \text{car } x' = y' < x = y \\ &< \wedge \quad \text{car } \vdash \neg x' = 0 \end{aligned}$$

et donc : $\bigvee_z z + \underline{m} = \underline{n} < \wedge$, c'est-à-dire $\vdash \neg \bigvee_z z + \underline{m} = \underline{n}$.

Toute composition par des foncteurs logiques, de formules qui sont leur propre représentation fidèle, est évidemment elle aussi sa propre représentation fidèle. Si on a, par exemple :

$$A \longrightarrow \vdash A, \neg A \longrightarrow \vdash \neg A$$

$$\text{et } B \longrightarrow \vdash B, \neg B \longrightarrow \vdash \neg B$$

on aura aussi $A \wedge B \longrightarrow \vdash A \wedge B$ et $\neg(A \wedge B) \longrightarrow \vdash \neg(A \wedge B)$.

Preuve : De $A \wedge B$ suit $\vdash A$ et $\vdash B$, donc $\vdash A \wedge B$. De $\neg(A \wedge B)$ suit, pour un A et un B décidables, $\neg A$ ou $\neg B$, ce qui donne $\vdash \neg A \vee \neg B$ et donc $\neg(A \wedge B)$.

Les compositions avec $\vee$ sont à traiter de façon semblable. Le cas de la négation $\neg$ est trivial puisque, pour des formules décidables, on a aussi de façon constructive $\neg\neg A \leftrightarrow A$.

Il ne reste donc plus qu'à examiner les formules composées à l'aide de quantificateurs restreints. On a pour tout m :

$$A(m) \longrightarrow \vdash A(\underline{m})$$

$$\text{et } \neg A(m) \longrightarrow \vdash \neg A(\underline{m}).$$

Il s'ensuit immédiatement que :

$$(11.14) \quad \bigvee_n A(m) \longrightarrow \vdash \bigvee_x A(x)$$

puisque de $\bigvee_n A(m)$ découle que $m \leq n \wedge A(m)$ pour un certain m , donc $\vdash \underline{m} \leq \underline{n} \wedge A(\underline{m})$.

On a donc finalement : $\vdash \bigvee_x . x \leq \underline{n} \wedge A(x)$.

$$(11.15) \quad \neg \bigwedge_n A(m) \longrightarrow \vdash \neg \bigwedge_x A(x)$$

peut se ramener à ce qui précède. En effet, pour un $A(x)$ décidable, il découle de $\neg \bigwedge_n A(m)$ qu'on a, même en arithmétique constructive, $\bigvee_n \neg A(m)$, donc $\vdash \bigvee_x \neg A(x)$ et partant $\vdash \neg \bigwedge_x A(x)$.

Il ne reste finalement plus que :

$$(11.16) \quad \bigwedge_n A(m) \longrightarrow \vdash \bigwedge_x A(x)$$

$$(11.17) \quad \neg \bigvee_n A(m) \longrightarrow \vdash \neg \bigvee_x A(x).$$

On peut de nouveau ramener (11.17) à (11.16). Pour (11.16) il faut prouver :

$$A(0) \wedge A(0') \wedge \dots \wedge A(\underline{n}) < \bigwedge_x A(x).$$

Comme on a pour tout m : $A(\underline{m}) \wedge x = \underline{m} < A(x)$, on a aussi pour tout $m \leq n$:

$$A(0) \wedge A(0') \wedge \dots \wedge A(\underline{n}) \wedge x = \underline{m} < \neg x \leq \underline{n} \vee A(x).$$

Et il vient de façon triviale :

$$A(0) \wedge A(0') \wedge \dots \wedge A(\underline{n}) \wedge \neg x \leq \underline{n} < \neg x \leq \underline{n} \vee A(x).$$

Il suffit donc de montrer que :

$$(11.18) \quad \vdash x = 0 \vee x = 0' \vee \dots \vee x = \underline{n} \vee \neg x \leq \underline{n}.$$

Ce n'est que pour cela qu'on utilise l'axiome de Robinson (11.12). Pour $n = 0$, il faut prouver $\vdash x = 0 \vee \neg x \leq 0$.

L'axiome de Robinson donne :

$$\vdash x = 0 \vee \bigvee_y x = y'.$$

Et parce que

$$\begin{aligned} x = y' \wedge z + x = 0 &< z + y' = 0 \\ &< (z + y)' = 0 \\ &< \wedge \end{aligned}$$

on a aussi

$$\bigvee_y x = y' \wedge \bigvee_z z + x = 0 < \wedge$$

donc :

$$\begin{aligned} \bigvee_y x = y' &< \neg \bigvee_z z + x = 0 \\ \bigvee_y x = y' &< \neg x \leq 0. \end{aligned}$$

Prenons maintenant comme hypothèse d'induction :

$$\vdash y = 0 \vee \dots \vee y = \underline{n} \vee \neg y \leq \underline{n}.$$

Puisque $y = \underline{m} < y' = \underline{m}'$ et $\neg y \leq \underline{n} < \neg y' \leq \underline{n}'$ (on a, en effet, $z + y = \underline{n} \asymp (z + y)' = \underline{n}' \asymp z + y' = \underline{n}'$), il vient :

$$\vdash y' = 0' \vee \dots \vee y' = \underline{n}' \vee \neg y' \leq \underline{n}'$$

et donc :

$$x = y' < x = 0' \vee \dots \vee x = \underline{n}' \vee \neg x \leq \underline{n}'.$$

L'application de l'axiome de Robinson fournit ce qu'on cherche :

$$\vdash x = 0 \vee x = 0' \vee \dots \vee x = \underline{n}' \vee \neg x \leq \underline{n}'.$$

On peut aussi traiter de la même manière le cas général d'un quantificateur restreint, disons celui de $\bigwedge_{t(y_1, \dots, y_r)} A(y_1, \dots, y_r, x)$ où x ne figure pas en $t(y_1, \dots, y_r)$. On obtient en conséquence le résultat suivant :

Théorème 11.1. Toute relation arithmétique $\tilde{R}$ réalisable au sens restreint est représentable fidèlement au sens de la négation dans le formalisme de Robinson. Il existe une formule restreinte $A(x_1, \dots, x_r)$ telle que, pour tous nombres $n_1, \dots, n_r$, on ait :

$$\begin{aligned} n_1, \dots, n_r \in \tilde{R} &\longrightarrow \vdash A(\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_r) \\ n_1, \dots, n_r \notin \tilde{R} &\longrightarrow \vdash \neg A(\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_r). \end{aligned}$$

Toute formule restreinte est sa propre représentation fidèle.

Il manque encore une étape pour atteindre le but que nous nous sommes proposé au § 9 : prouver de toute relation décidable qu'elle est représentable.

Théorème 11.2. Toute relation décidable est représentable fidèlement dans le formalisme de Robinson.

Nous ferons précéder la preuve de ce théorème d'un lemme relatif au formalisme de Robinson :

$$(11.19) \quad \vdash x \leq \underline{n} \vee \underline{n} \leq x.$$

Preuve : Le cas $n = 0$ est trivial. On a $\vdash 0 \leq x$ puisque $x + 0 = x$ est un axiome. Posons $\vdash y \leq \underline{n} \vee \underline{n} \leq y$ comme hypothèse d'induction. Il s'ensuit $\vdash y' \leq \underline{n}' \vee \underline{n}' \leq y'$ et donc $x = y' < x \leq \underline{n}' \vee \underline{n}' \leq x$. Dès lors $x = 0 < x \leq \underline{n}' \vee \underline{n}' \leq x$ est de nouveau trivial à cause de $\vdash 0 \leq \underline{n}'$. Une application de l'axiome de Robinson donne alors :

$$\vdash x \leq \underline{n}' \vee \underline{n}' \leq x.$$

Pour prouver le théorème 11.2, nous nous contenterons de traiter le cas d'un ensemble décidable $\tilde{M}$. La procédure est en effet analogue pour les relations. Si $\tilde{M}$ est décidable, $\tilde{M}$ et son complément sont énumérables. Il existe donc des réalisations arithmétiques normales :

$$\begin{aligned} n \in \tilde{M} &\longleftrightarrow \bigvee_m A(m, n) \\ n \notin \tilde{M} &\longleftrightarrow \bigvee_m B(m, n) \end{aligned}$$

avec des formules restreintes $A(x, y)$ et $B(x, y)$.

Nous prétendons, selon ROSSER 1936, que la formule :

$$\bigvee_x . A(x, z) \wedge \bigwedge_y \neg B(y, z)$$

est une représentation fidèle de $z \in \tilde{M}$. Si on a en effet :

$$n \in \tilde{M} \longrightarrow \vdash \bigvee_x . A(x, \underline{n}) \wedge \bigwedge_y \neg B(y, \underline{n})$$

il s'ensuivra que :

$$\begin{aligned} n \in \tilde{M} &\longrightarrow \bigvee_m A(m, n) \\ &\longrightarrow \vdash A(\underline{m}, \underline{n}) \quad \text{pour un certain } m. \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned} n \in \tilde{M} &\longrightarrow \neg \bigvee_l B(l, n) \\ &\longrightarrow \bigwedge_l \neg B(l, n) \\ &\longrightarrow \bigwedge_{\underline{m}} \neg B(l, n) \\ &\longrightarrow \vdash \bigwedge_{\underline{m}} \neg B(y, \underline{n}) \quad \text{selon (11.16)} \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} n \in \tilde{M} &\longrightarrow \vdash A(\underline{m}, \underline{n}) \wedge \bigwedge_{\underline{m}} \neg B(y, \underline{n}) \\ &\longrightarrow \vdash \bigvee_x . A(x, \underline{n}) \wedge \bigwedge_y \neg B(y, \underline{n}). \end{aligned}$$

L'implication qui manque encore :

$$n \notin \tilde{M} \longrightarrow \vdash \neg \bigvee_x . A(x, \underline{n}) \wedge \bigwedge_y \neg B(y, \underline{n})$$

découle de $n \notin \tilde{M} \longrightarrow \bigwedge_x \neg \cdot A(x, \underline{n}) \vee \bigvee_y B(y, \underline{n})$, expression dont la preuve se présente comme suit :

$$\begin{aligned} n \notin \tilde{M} &\longrightarrow B(l, n) \quad \text{pour un certain } l \\ &\longrightarrow \vdash B(l, \underline{n}) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} l \leq x < l \leq x &\wedge B(l, \underline{n}) \\ l \leq x < \bigvee_y . y \leq x &\wedge B(y, \underline{n}). \end{aligned}$$

c'est-à-dire (1) $l \leq x < \bigvee_y B(y, \underline{n})$.

De plus on a :

$$\begin{aligned} n \notin \tilde{M} &\longrightarrow \neg A(m, n) \quad \text{pour tout } m \\ &\longrightarrow \vdash \bigwedge_{\underline{l}} \neg A(x, \underline{n}) \quad \text{par (11.16)} \end{aligned}$$

donc

$$(2) \quad x \leq l < \neg A(x, \underline{n}).$$

Les expressions (1), (2) et (11.19) donnent ensemble :

$$\vdash \neg A(x, \underline{n}) \vee \bigvee_x B(y, \underline{n}).$$

Le théorème 11.2 est ainsi prouvé, c'est-à-dire qu'on a établi la possibilité de représenter fidèlement toute relation décidable.

Cette possibilité de représenter fidèlement les relations décidables dans certains formalismes complets est même caractéristique de ces relations. En effet, toute relation R qui est fidèlement représentable dans un formalisme complet est en même temps énumérable, de même que son complément.

Quant aux relations énumérables (et non décidables), il est donc au plus possible de prouver qu'elles sont représentables dans des formalismes complets. Et elles le sont en fait. Mais la preuve n'utilise pas seulement la consistance des formalismes, elle présuppose encore une connaissance plus complète du semi-formalisme arithmétique. D'autre part, elle se passe de (11.19), de sorte que l'axiome de Robinson peut être remplacé par (11.18).

Théorème 11.3. Toute relation énumérable est représentable dans le formalisme de Robinson.

Preuve (pour les ensembles). Soit un ensemble énumérable $\tilde{M}$ qui a pour réalisation arithmétique normale :

$$n \in \tilde{M} \longleftrightarrow \bigvee_m A(m, n)$$

avec une formule restreinte $A(x, y)$. Nous prétendons que :

$$n \in \tilde{M} \longleftrightarrow \vdash \bigvee_x A(x, \underline{n}).$$

De gauche à droite, la preuve est triviale : de $n \in \tilde{M}$ suit $A(m, n)$ pour un certain m . Donc $\vdash A(\underline{m}, \underline{n})$ et en conséquence $\vdash \bigvee_x A(x, \underline{n})$.

Pour prouver la réciproque, nous considérerons en plus du formalisme de Robinson (ou d'une quelconque de ses extensions ω -consistantes) le semi-formalisme arithmétique que nous élargirons en lui ajoutant une nouvelle formule primitive Pxy . Posons, pour les nouvelles propositions primitives Pmn , que :

$$\begin{aligned} Pmn \text{ vraie} &\Leftrightarrow A(m, n) \\ Pmn \text{ fausse} &\Leftrightarrow \neg A(m, n). \end{aligned}$$

Comme toute formule déductible dans le formalisme de Robinson l'est aussi dans le semi-formalisme (et c'est là-dessus que repose toute la preuve de consistance), on peut déduire dans le semi-formalisme élargi $A(x, y) < Pxy$.

Puisque, pour tous m et n tels que Pmn est vraie on a une implication fondamentale et que pour tous m et n tels que Pmn est fausse on a $\neg A(m, n)$,

la formule $\neg A(\underline{m}, \underline{n})$ est dérivable dans le formalisme de Robinson et, en conséquence, $A(\underline{m}, \underline{n}) < \wedge$ dans le semi-formalisme. On peut enfin faire usage d'une induction infinie. Il s'ensuit que :

$$\bigvee_x A(x, \underline{y}) < \bigvee_x Pxy$$

est dérivable.

L'hypothèse que $\bigvee_x A(x, \underline{n})$ est dérivable dans le formalisme de Robinson, fournit la dérivabilité de :

$$\Upsilon < \bigvee_x A(x, \underline{n})$$

dans le semi-formalisme et par là celle de :

$$\Upsilon < \bigvee_x Pxn.$$

On en conclut alors facilement que l'une des propositions Pmn doit être vraie. En effet, seule entre en question comme prémisses d'une dérivation à partir de $\Upsilon < \bigvee_x Pxn$, une expression de la forme :

$$\Upsilon < P\underline{m}_1\underline{n} \vee \bigvee_x Pxn.$$

S'il ne s'agit pas encore d'une implication fondamentale, c'est-à-dire si $P\underline{m}_1\underline{n}$ est fausse, alors on doit disposer d'autres prémisses :

$$\begin{aligned} \Upsilon &< P\underline{m}_1\underline{n} \vee P\underline{m}_2\underline{n} \vee \bigvee_x Pxn \\ \Upsilon &< P\underline{m}_1\underline{n} \vee P\underline{m}_2\underline{n} \vee P\underline{m}_3\underline{n} \vee \bigvee_x Pxn. \\ &\dots \end{aligned}$$

On doit atteindre une implication fondamentale après un nombre fini de pas, c'est-à-dire qu'on doit rencontrer une proposition atomique vraie Pmn . Il existe donc un m tel que $A(m, n)$: donc $n \in \tilde{M}$.

Remarquons à propos de ce théorème que les considérations suivantes ne conduisent pas à une preuve de $\vdash \bigvee_x A(x, \underline{n}) \longrightarrow n \in \tilde{M}$. On conclut de $\vdash \bigvee_x A(x, \underline{n})$ à $\vdash \neg \bigwedge_x \neg A(x, \underline{n})$ et on utilise l' ω -consistance et la méta-implication $\vdash \neg A(\underline{m}, \underline{n})$ pour tout $m \longrightarrow \nvdash \neg \bigwedge_x \neg A(x, \underline{n})$ pour passer de la négation de la conclusion à $\nvdash \neg A(\underline{m}, \underline{n})$ pour un certain m . Mais cette dernière déduction ne vaut qu'en logique classique. Elle ne fournit donc que la « fiction » de l'existence d'un m tel que $A(m, n)$. D'un point de vue effectif, on a donc seulement $\neg \bigwedge_m \neg A(m, n)$ et seul le déroulement de la preuve de consistance fournit, comme on vient de le voir, $\bigvee_m A(m, n)$.

§ 12. Indécidabilité et incomplétude

Avec le théorème 11.2 nous avons atteint le but que nous nous étions fixé au § 9 : établir que toute relation décidable est représentable dans le forma-

lisme de Peano et même déjà dans celui de Robinson. La preuve d'indécidabilité que nous avons donnée contient encore l'hypothèse que la fonction diagonale d est calculable. Cette fonction est définie par :

$$d \text{ : } m = n \longleftrightarrow A_m(\underline{m}) \equiv A_n$$

où A_m et A_n sont des formules dont les nombres de Gödel sont respectivement m et n . Cette calculabilité est triviale, eu égard à la numération de Gödel utilisée. La substitution $\sum \xi \underline{m}AB$, c'est-à-dire $\xi/\underline{m}A \equiv B$, est en effet une relation énumérable (et même décidable). On obtient alors le

Théorème 12.1. Le formalisme de Robinson est indécidable, c'est-à-dire que l'ensemble de ses formules dérivables n'est pas décidable.

Comme l'ensemble des formules dérivables d'un formalisme complet est toujours énumérable, nous avons là un exemple d'un ensemble énumérable quoique indécidable. D'autre part, l'ensemble des formules non dérivables est un exemple d'un ensemble non énumérable.

La preuve du théorème 12.1, que nous avons donnée aux paragraphes 9 à 11, permet de renforcer ce théorème de diverses façons. Avant de nous y appliquer, nous tenons toutefois à mentionner en passant que le raisonnement par la diagonale, qui conduit au théorème 12.1, fournit aussi sans peine des exemples d'ensembles qui ne sont pas arithmétiquement réalisables. Ainsi par exemple $\in_m \neg A_m(\underline{m})$, soit l'ensemble des m pour lesquels la formule $A_m(\underline{m})$ n'est pas valable (en arithmétique constructive). Une contradiction découle en effet de la relation : pour tout $m \neg A_m(\underline{m}) \longleftrightarrow A_1(\underline{m})$.

Puisque la fonction diagonale d est, en tant que fonction calculable, arithmétiquement réalisable, $\in_m A_m$ l'est aussi et donc l'ensemble des formules du formalisme de Peano, qui sont « vraies » de façon constructive, n'est pas arithmétiquement réalisable. S'il l'était en effet, $\in_m \neg A_m$ le serait aussi, de même que $\in_m \neg A_m(\underline{m})$ en vertu de

$$\neg A_m(\underline{m}) \longleftrightarrow \bigvee_n . d \text{ : } m = n \wedge \neg A_n .$$

Mais revenons au formalisme. La preuve du théorème 12.1 faisait usage, au lieu du formalisme de Peano, de celui $\mathfrak{F}$ de Robinson auquel elle n'empruntait d'ailleurs que ce qui suit :

- 1) $\mathfrak{F}$ est consistant.
- 2) Pour toute relation décidable $\tilde{R}$, $\mathfrak{F}$ contient une formule $A(x_1, \dots, x_r)$ avec

$$\begin{aligned} n_1, \dots, n_r \in \tilde{R} &\longrightarrow \vdash A(\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_r) \\ n_1, \dots, n_r \notin \tilde{R} &\longrightarrow \vdash \neg A(\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_r). \end{aligned}$$

D'une façon générale, nous exigerons d'un formalisme arithmétique $\mathfrak{F}$ les propriétés suivantes :

- a) Les formules de $\mathfrak{F}$ sont constituées de certaines constantes, formules primitives et termes primitifs à l'aide des particules logiques, y compris l'égalité $=$.
- b) Tout nombre n est en correspondance bi-univoque avec un terme constant $\underline{n}$.
- c) Il existe une numération de Gödel des formules de $\mathfrak{F}$, telle que la fonction diagonale d soit calculable.
- d) Certaines formules de $\mathfrak{F}$ sont distinguées comme étant *dérivables* ($\vdash$). La classe des formules dérivables est fermée par rapport aux implications logiques classiques.

Théorème 12.2. Tout formalisme arithmétique consistant, dans lequel toute relation décidable est fidèlement représentable, est indécidable.

Il n'est pas nécessaire que les formalismes dont parle ce théorème soient complets. Le théorème 12.2 s'applique aussi par exemple au semi-formalisme arithmétique. La condition d) y est en effet aussi satisfaite. Ce qu'on exige ainsi de la logique classique est au fond fort peu de chose : il suffit en somme qu'elle fournisse une négation. Il ne vaut toutefois pas la peine d'entrer dans le détail des généralisations du théorème 12.1 qui sont ainsi rendues possibles.

Dans le théorème 12.2, la condition d'indécidabilité jouit de la propriété qu'elle reste satisfaite si la classe des formules dérivables est arbitrairement étendue — en introduisant par exemple de nouveaux axiomes — aussi longtemps que la consistance est conservée. Une formule, en effet, qui était dérivable avant l'augmentation du nombre des axiomes, l'est tout autant après. Il est aussi possible d'accroître simultanément l'ensemble des constantes, des relations et des foncteurs. Si avant une telle extension il existe, pour chaque relation décidable, une formule qui la représente fidèlement, il en existe encore une après l'extension.

Théorème 12.3. Le formalisme de Robinson est essentiellement indécidable, c'est-à-dire que chacune de ses extensions consistantes est indécidable.

Définition 12.1. Si $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$ sont des formalismes arithmétiques, on dit que $\mathfrak{F}_2$ est une *extension* de $\mathfrak{F}_1$, si

- 1) toute expression de $\mathfrak{F}_1$ (c'est-à-dire toute formule et tout terme) est une expression de $\mathfrak{F}_2$,
- 2) toute formule dérivable dans $\mathfrak{F}_1$ est dérivable dans $\mathfrak{F}_2$. On dit alors aussi que $\mathfrak{F}_1$ est un *sous-formalisme* de $\mathfrak{F}_2$.

Si $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$ possèdent les mêmes expressions, on dit que $\mathfrak{F}_2$ est une *extension de même portée* que $\mathfrak{F}_1$ ¹³ et que $\mathfrak{F}_1$ est un *sous-formalisme de même portée* que $\mathfrak{F}_2$.

Si $\mathfrak{F}_2$ est une extension de $\mathfrak{F}_1$ (qui peut ne pas avoir même portée que lui) et si toute formule de $\mathfrak{F}_1$ qui est dérivable dans $\mathfrak{F}_2$ est déjà dérivable dans $\mathfrak{F}_1$, on dit alors que $\mathfrak{F}_2$ est une *extension conservante* de $\mathfrak{F}_1$.

Soit $\mathfrak{A}_1$ ($\mathfrak{A}_2$) l'ensemble des expressions de $\mathfrak{F}_1$ ($\mathfrak{F}_2$). Désignons par $\vdash_1$ ($\vdash_2$) la dérivabilité dans $\mathfrak{F}_1$ ($\mathfrak{F}_2$). Alors, d'après la définition 12.1, les deux relations suivantes caractérisent le fait que $\mathfrak{F}_2$ est une extension de $\mathfrak{F}_1$:

- (1) $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2$.
- (2) $\vdash_1 A \longrightarrow \vdash_2 A$, pour tout $A \in \mathfrak{A}_1$.

L'extension a même portée si, au lieu de (1), on a

$$(1') \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2$$

et elle est conservante si, au lieu de (2), on a

$$(2') \vdash_1 A \longleftrightarrow \vdash_2 A, \text{ pour tout } A \in \mathfrak{A}_1.$$

Une extension $\mathfrak{F}_2$ qui est conservante et de même portée que $\mathfrak{F}_1$ est une *extension impropre* de $\mathfrak{F}_1$. Elle ne peut se distinguer de $\mathfrak{F}_1$ au plus que par une axiomatisation différente. La classe des formules dérivables peut en effet toujours se définir en donnant tout d'abord un ensemble d'axiomes et en considérant comme dérivables toutes les implications logiques et classiques des axiomes. On peut donc toujours dans un formalisme adopter un certain ensemble d'axiomes. Des formalismes qui ont une même extension impropre, qui ont donc les mêmes expressions et les mêmes formules dérivables (et ne diffèrent que par leurs axiomes) sont dits *équivalents*.

Définition 12.2. Soit un formalisme $\mathfrak{F}$. S'il existe un formalisme équivalent à $\mathfrak{F}$ dont l'ensemble des axiomes est fini (respectivement décidable), on dit que $\mathfrak{F}$ est *axiomatisable* de façon finie (respectivement de façon décidable).

Définition 12.3. Une extension de $\mathfrak{F}$ (qui n'est pas nécessairement de même portée que $\mathfrak{F}$) dont l'ensemble des axiomes résulte de l'adjonction d'un nombre fini de formules à l'ensemble des axiomes de $\mathfrak{F}$, est appelée une *extension finie* de $\mathfrak{F}$.

Si l'on a un formalisme indécidable mais non essentiellement, on ne peut en général conclure à l'indécidabilité d'une de ses extensions que si celle-ci est conservante. Un procédé de décision pour une extension conservante

13. En allemand *ausdruckgleiche Erweiterung*, littéralement « extension égale quant aux expressions ».

fournit, en effet, immédiatement un procédé de décision pour le sous-formalisme.

Théorème 12.4. Si un formalisme est indécidable, chacune de ses extensions conservantes l'est aussi.

En revanche, on peut conclure à l'indécidabilité d'un sous-formalisme si on a affaire à une extension finie et de même portée que lui.

Théorème 12.5. Si une extension finie d'un formalisme $\mathfrak{F}$, de même portée que lui, est indécidable, $\mathfrak{F}$ l'est aussi.

Preuve : Soit $\mathfrak{F}'$ une extension de même portée que $\mathfrak{F}$ et qui résulte de l'adjonction de $A_1, \dots, A_n$ aux axiomes de $\mathfrak{F}$. En vertu du théorème de la déduction, on a pour une proposition A que $\vdash A$ en $\mathfrak{F}'$ si et seulement si $\vdash A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow A$ en $\mathfrak{F}$. Il s'ensuit qu'un procédé de décision pour $\mathfrak{F}$ fournit aussi un procédé de décision pour $\mathfrak{F}'$.

En présence du théorème 12.5, l'indécidabilité du formalisme de Robinson dans lequel on supprime ses axiomes arithmétiques (qui sont en nombre fini) implique, par exemple, l'indécidabilité d'un formalisme qu'on obtient à partir du calcul des quantificateurs (y compris les axiomes d'égalité) par une restriction aux expressions du formalisme de Peano. Comme il est encore possible de remplacer les axiomes d'égalité :

$$\begin{aligned} x &= x \\ x &= y \wedge A(x) \rightarrow A(y) \end{aligned}$$

par un nombre fini d'axiomes, en n'exigeant le schéma que pour les formules primitives $A(x)$:

$$\begin{aligned} x &= x \\ x &= z \wedge y = z \rightarrow x = y \\ x &= y \rightarrow x' = y' \\ x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 &\rightarrow x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 &\rightarrow x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 \end{aligned}$$

on obtient encore par là l'indécidabilité du calcul des quantificateurs sans les axiomes d'égalité — en commençant de nouveau par une restriction aux expressions du formalisme de Peano. L'indécidabilité du calcul des quantificateurs complet avec des formules primitives arbitraires (CHURCH 1936) découle alors de ce que ce dernier est manifestement une extension conservante de tout calcul des quantificateurs restreints.

Nous traiterons au chapitre suivant des applications des théorèmes 12.3 –

12.5 à la question de la décidabilité des théories axiomatiques qu'on rencontre en mathématique moderne. Nous n'examinerons ici que quelques conséquences pour l'arithmétique du théorème 12.3, conséquences qui concernent l'incomplétude des formalisations arithmétiques.

Définition 12.4. Un formalisme (consistant) est dit *complet* si, pour chacune de ses propositions A , on a soit $\vdash A$ soit $\vdash \neg A$.

Cette définition n'a de sens que si on exige que A soit une proposition (c'est-à-dire qu'elle ne puisse contenir de variables libres). Sans cela l'incomplétude serait triviale. Ainsi par exemple, on n'a ni $\vdash x = y$, ni $\vdash \neg x = y$ dans une formalisation consistante de l'arithmétique.

Il existe une relation simple entre la complétude et la décidabilité.

Théorème 12.6. Tout formalisme complet est décidable.

Preuve : L'ensemble des propositions A d'un formalisme¹⁴, telles que $\vdash A$, est énumérable. Il ne s'agit-là que de la définition de la notion de formalisme. De même l'ensemble des propositions, telles que $\vdash \neg A$, est énumérable. Il est de plus possible de décider si une proposition déductible B est de la forme $\neg A$ (et de « calculer » A à partir de B en laissant tomber les $\neg$). D'autre part, dire qu'un formalisme est complet, veut dire que l'ensemble complémentaire des propositions dérivables (au sein de l'ensemble de toutes les propositions) est tout justement l'ensemble des propositions A , telles que $\vdash \neg A$. Il s'ensuit que l'ensemble des propositions dérivables d'un formalisme complet est décidable. L'ensemble des formules dérivables est donc trivialement décidable, puisque une formule $A(x_1, \dots, x_n)$, où $x_1, \dots, x_n$ sont les seules variables, est dérivable si et seulement si la proposition

$$\bigwedge_{x_1, \dots, x_n} A(x_1, \dots, x_n)$$

l'est.

La réciproque du théorème 12.6 n'est pas vraie, comme le montre l'exemple du formalisme qui n'a d'autres termes que les constantes primitives $1, \dots, n$ et qui a l'unique axiome $\bigwedge_x x = 1 \vee \dots \vee x = n$. Ce formalisme n'est pas complet. Ainsi, par exemple, pour $n > 1$ ni $\bigwedge_{x,y} x = y$ ni $\neg \bigwedge_{x,y} x = y$ ne sont dérivables. Mais la décidabilité découle immédiatement de ce qu'on peut éliminer tous les quantificateurs grâce aux relations :

$$\begin{aligned} \bigwedge_x A(x) &\longleftrightarrow A(1) \wedge \dots \wedge A(n) \\ \bigvee_x A(x) &\longleftrightarrow A(1) \vee \dots \vee A(n). \end{aligned}$$

14. « Complet » au sens qu'il s'agit d'un *Vollformalismus*, mais pas nécessairement « complet » au sens de *vollständig*.

Les théorèmes 12.3 et 12.6 montrent que le formalisme de Peano, par exemple, est incomplet. Et c'est bien un formalisme au sens plein du terme. Non seulement en effet il a un nombre fini d'axiomes, mais l'ensemble de ses axiomes est décidable et même élémentairement décidable.

Nous pouvons formuler ces résultats comme suit :

Théorème 12.7. Le formalisme de Peano est essentiellement incomplet, c'est-à-dire que chacune de ses extensions consistantes entièrement formalisées est incomplète.

Enfin, pour établir l'incomplétude d'autres formalismes, on pourra utiliser le

Théorème 12.8. Si un formalisme est incomplet, chacun de ses sous-formalismes de même portée que lui l'est aussi, de même que chacune de ses extensions conservantes.

Nous avons (tacitement) compris l'incomplétude comme la négation de la complétude au sens de la définition 12.4. Par conséquent l'incomplétude ne pose pas l'existence d'une proposition A pour laquelle on n'aurait ni $\vdash A$ ni $\vdash \neg A$.

Définition 12.5. Un formalisme est *effectivement incomplet* si, pour une de ses propositions A , on n'a ni $\vdash A$ ni $\vdash \neg A$.

Il est clair que le théorème 12.8 est valable si on y remplace « incomplet » par « effectivement incomplet ».

Pour montrer le caractère effectivement incomplet, celui par exemple du formalisme de Peano, nous allons récapituler quelques uns des pas de la preuve précédente. Commençons par considérer l'ensemble des nombres de Gödel pour lesquels on a $\vdash A_n(\underline{n})$. A_n est ici la formule dont le nombre de Gödel est n et $A_n(\underline{n})$ en résulte par substitution de $\underline{n}$ à la variable ξ .

Cet ensemble $\in_n \vdash A_n(\underline{n})$ est énumérable. Il en existe donc une réalisation arithmétique normale :

$$(1) \quad \vdash A_n(\underline{n}) \longleftrightarrow \forall_m B(m, n) \text{ pour tout nombre de Gödel } n,$$

avec une formule restreinte $B(x, y)$ qui peut elle-même se représenter fidèlement :

$$(2) \quad B(m, n) \longrightarrow \vdash B(\underline{m}, \underline{n})$$

$$(3) \quad \neg B(m, n) \longrightarrow \vdash \neg B(\underline{m}, \underline{n}).$$

Il suit de (1) et (2) :

$$(4) \quad \vdash A_n(\underline{n}) \longrightarrow \vdash \forall_x B(x, \underline{n}).$$

Nous savons, par le théorème 11.3, que (4) est encore valable si on y remplace $\longrightarrow$ par $\longleftarrow$, mais nous n'utiliserons pas ici ce théorème qui repose sur le semi-formalisme arithmétique.

L'ensemble $\in_n \vdash A_n(\underline{n})$ n'est en tous cas pas fidèlement représentable par la formule $\bigvee_x B(x, y)$. On a bien, grâce à la consistance du formalisme et de (4) :

$$(5) \quad \vdash \neg \bigvee_x B(x, \underline{n}) \longrightarrow \not\vdash \bigvee_x B(x, \underline{n}) \longrightarrow \not\vdash A_n(\underline{n})$$

$$\text{mais} \quad \not\vdash A_n(\underline{n}) \longrightarrow \vdash \neg \bigvee_x B(x, \underline{n})$$

n'est pas valable pour tout n . Un nombre g , tel que

$$(6) \quad \not\vdash A_g(g) \quad \text{et}$$

$$(7) \quad \not\vdash \neg \bigvee_x B(x, g)$$

est fourni, par exemple, par le nombre de Gödel de la formule $\neg \bigvee_x B(x, \xi)$.

Pour ce nombre g , en effet, (6) n'est qu'une autre façon d'écrire (7) et (7) est valable puisque, d'après (5), $\not\vdash A_g(g)$ découle immédiatement de $\vdash \neg \bigvee_x B(x, g)$. (Nous usons ici de l'implication de la logique effective $a \rightarrow \neg a < \neg a$).

Par (6) et (1) on a de plus $\neg \bigvee_m B(m, g)$, donc $\neg B(m, g)$ pour tout m et en conséquence par (3) :

$$(8) \quad \vdash \neg B(\underline{m}, g) \text{ pour tout } m.$$

Il découle enfin de (8), grâce à l' ω -consistance du formalisme, que $\not\vdash \bigwedge_x \neg B(x, g)$, soit :

$$(9) \quad \not\vdash \bigvee_x B(x, g).$$

On voit par (7) et (9) que $\bigvee_x B(x, g)$ est une proposition qui prouve l'incomplétude effective.

Si on ne suit la marche de la preuve que jusqu'à (8), on obtient déjà l' ω -incomplétude effective. Il existe (de façon effective) une formule $C(x)$ (à savoir $\neg B(x, g)$) pour laquelle, en effet, on a $C(\underline{m})$ pour tout m , mais (d'après (7)) pour laquelle on n'a pas $\vdash \bigwedge_x C(x)$.

Théorème 12.9. Le formalisme de Robinson est essentiellement et effectivement ω -incomplet, c'est-à-dire que chacune de ses extensions entièrement formalisées et consistantes est effectivement ω -incomplète.

Le passage de (8) à (9) donne, d'une façon générale :

Théorème 12.10. Tout formalisme ω -consistant et (effectivement) ω -incomplet est (effectivement) incomplet.

Preuve : Soit $\vdash C(\underline{m})$ pour tout m . On n'a pas alors, grâce à l' ω -consistance, $\vdash \neg \bigwedge_x C(x)$. Si de même on n'a pas $\vdash \bigwedge_x C(x)$, la formule $\bigwedge_x C(x)$ prouve l'incomplétude effective.

Cette manière directe de prouver l'incomplétude, sans le détour par la notion générale de la décidabilité, est en même temps celle qu'a utilisée GÖDEL 1931 et qui a suscité les recherches ultérieures sur l'indécidabilité. Dans le mémoire en question, Gödel a encore ajouté, comme il dit, à la preuve de (6) et (7) un « merkwürdiges Resultat »¹⁵. Il concerne l'indérivabilité d'une proposition qui représente la consistance du formalisme considéré, par exemple de celui de Peano. Comme nous avons déjà prouvé la consistance, l'indérivabilité d'une telle proposition dans certains formalismes n'importe pas au problème de la consistance lui-même. Toutefois, en 1931, la consistance n'était pas encore établie (la preuve de GENTZEN ne fut publiée qu'en 1936), de sorte que le résultat de Gödel jouait un rôle important. Il est d'ailleurs encore important aujourd'hui pour faire comprendre l'usage des semi-formalismes dans la preuve de consistance. On pourrait à première vue tenter — et c'était bien l'intention de HILBERT — de procéder de la façon suivante. On se donne une réalisation arithmétique pour l'indérivabilité. La formule $\neg \bigvee_x B(x, y)$ de tout à l'heure remplit ce rôle. On a en effet pour elle :

$$\not\vdash A_n(\underline{n}) \longleftrightarrow \neg \bigvee_m B(m, n).$$

Si f est le nombre de Gödel de la formule $\bigwedge$, alors $A_f \equiv \bigwedge$, et donc aussi $A_f(f) \equiv \bigwedge$. On a donc pour la formule de consistance $\not\vdash \bigwedge$:

$$\not\vdash \bigwedge \longleftrightarrow \neg \bigvee_m B(m, f).$$

On pourrait donc essayer de chercher une preuve de consistance en prouvant $\vdash \neg \bigvee_x B(x, f)$ et on pourrait éventuellement commencer par n'utiliser pour cela que la logique effective.

Mais on peut aujourd'hui montrer grâce à GÖDEL que, sous certaines conditions, la formule $\neg \bigvee_x B(x, f)$ n'est pas dérivable dans le formalisme (théorème de GÖDEL sur l'indérivabilité).

Considérons pour cela la déduction qui nous a conduits à (6). C'est par un raisonnement indirect que nous avons obtenu (6), puisque d'après (4) l'hypothèse $\vdash A_g(g)$ permet de dériver une contradiction : $\vdash A_f(f)$. Mais le passage de $\vdash A_g(g)$ à $\vdash A_f(f)$ peut se faire de façon constructive. On peut

15. Un résultat remarquable.

fournir un procédé qui conduit d'une dérivation supposée donnée de $A_g(g)$ à une dérivation de $A_f(f)$. Il nous faut pour cela revenir une fois de plus aux §§ 9-11. On y voit la manière de trouver une formule arithmétique restreinte $B(x, y)$ qui permet d'obtenir toujours, à partir de la dérivation d'une formule $A_n(n)$, un nombre m et une dérivation de $B(m, n)$; et réciproquement. Soit alors de nouveau g le nombre de Gödel de $\neg \bigvee_x B(x, g)$ et k un nombre qu'on a obtenu, comme on l'a dit plus haut, à partir d'une dérivation (supposée donnée) de $A_g(g)$. On peut ainsi construire une dérivation de $B(k, g)$ et de là, par les règles logiques, une dérivation de $\bigvee_x B(x, g)$. En réunissant ceci à la dérivation (supposée donnée) de $A_g(g)$, c'est-à-dire de $\neg \bigvee_x B(x, g)$, on obtient une dérivation de $\wedge$, soit de $A_f(f)$. La consistance du formalisme entraîne alors que l'hypothèse était fausse : $\neg \bigvee_x B(x, g)$ n'est pas dérivable. On n'en peut pas moins trouver hypothétiquement un nombre l et une dérivation de $B(l, f)$. Si on arithmétise ces prescriptions métamathématiques de calcul pour l (en partant de k), on obtient encore selon les §§ 9-11 un terme arithmétique $t(x)$ avec $t(k) = l$ et tel qu'on ait $\vdash B(t(k), f)$ si $\vdash B(k, g)$. En d'autres termes, on a pour tout k :

$$(10) \quad \vdash B(k, g) \longrightarrow \vdash B(t(k), f).$$

Puisque $B(x, y)$ est une formule restreinte, il vient :

$$(11) \quad \vdash B(k, g) \rightarrow B(t(k), f) \text{ pour tout } k.$$

Pour continuer la démarche de la preuve de GÖDEL, il faut encore que, non seulement (11) soit valable dans le formalisme considéré, mais qu'on ait de plus :

$$(12) \quad \vdash B(x, g) \rightarrow B(t(x), f)$$

avec une variable x .

Comme un système entièrement formalisé est par nature ω -incomplet, (12) représente une nouvelle condition sur les formalismes. Il s'agit de ce qu'on appelle la « condition de dérivabilité de BERNAYS ». Dans HILBERT-BERNAYS II, en particulier au § 5.2, on montre tout d'abord, en effet, que cette condition est satisfaite dans le formalisme de Peano pour une certaine formule $B(x, y)$ et qu'il en est de même pour toute extension de ce formalisme.

Supposons que la condition (12) soit satisfaite. Il vient alors :

$$\begin{aligned} & \vdash B(x, g) \rightarrow \bigvee_y B(y, f) \\ & \vdash \bigvee_x B(x, g) \rightarrow \bigvee_y B(y, f) \\ & \vdash \neg \bigvee_y B(y, f) \rightarrow \neg \bigvee_x B(x, g). \end{aligned}$$

Et, puisque $\neg \bigvee_x B(x, g)$ n'est pas dérivable, on a bien :

$$(13) \quad \not\vdash \neg \bigvee_y B(y, f).$$

Ceci nous donne le théorème d'indérivabilité de GÖDEL sous la forme suivante :

Dans toute extension consistante du formalisme de Robinson (HILBERT-BERNAYS : dans toute extension consistante du formalisme de Peano) qui satisfait la condition de dérivabilité de BERNAYS, la proposition formalisée de la consistance de l'extension est indérivable.

Ce théorème, qui semblait tout d'abord marquer selon l'expression de BERNAYS un « fiasco » de la métamathématique, a donné lieu à de nombreuses discussions. Le plus original doit être ce qu'en a dit le mathématicien A. WEIL : « Dieu existe puisque les mathématiques sont non contradictoires et le Diable existe puisque nous ne pouvons pas le prouver ».

D'un point de vue critique toutefois, le théorème d'indérivabilité de GÖDEL ne porte ni sur Dieu, ni sur le monde, ni sur les facultés humaines de connaître : ce n'est qu'un théorème des mathématiques constructives. Il ne porte aucunement préjudice à la « qualité » des mathématiques constructives, il les présuppose pour sa preuve. Mais la « qualité » de l'arithmétique formalisée est ébranlée par la preuve constructive de la consistance. Le théorème de GÖDEL explique pourquoi il faut prendre ici plus de précautions que ne le soupçonnait HILBERT.

Contrairement au théorème d'incomplétude, le théorème d'indérivabilité n'est pas extensionnel, ainsi que S. FEFERMAN l'a remarqué. Il n'est pas invariant lorsqu'on substitue aux formules qui y figurent d'autres formules dont on exige seulement qu'elles soient de même extension, c'est-à-dire qu'elles représentent les mêmes ensembles.

Posons par exemple :

$$B^*(x, y) \Leftrightarrow B(x, y) \wedge \neg \bigvee_z B(z, f).$$

On a alors (en vertu de la consistance) :

$$B^*(m, n) \longleftrightarrow B(m, n) \text{ pour tous } m \text{ et } n$$

et donc aussi (en vertu du quantificateur restreint $\bigvee_x$) :

$$\vdash B^*(\underline{m}, \underline{n}) \leftrightarrow B(\underline{m}, \underline{n}) \text{ pour tous } m \text{ et } n.$$

Les formules $B^*(x, y)$ et $B(x, y)$ sont ainsi de même extension. Et toutefois on a (vraisemblablement à cause du théorème d'indérivabilité) :

$$(14) \quad \vdash \neg \bigvee_x B^*(x, f).$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
 \text{De} \quad & \vdash \neg B(x, f) \vee B(x, f) \\
 \text{suit} \quad & \vdash \neg B(x, f) \vee \bigvee_x B(x, f) \\
 & \vdash \bigwedge_x \neg B(x, f) \vee \bigvee_x B(x, f). \\
 & \vdash \neg \bigvee_x B(x, f) \wedge \neg \bigvee_x B(x, f).
 \end{aligned}$$

Nous ne pouvons cependant que difficilement considérer ceci comme une dérivation de la consistance formalisée. En effet

$$\vdash B(x, f) \leftrightarrow B^*(x, f)$$

n'est pas valable, puisque, dans le cas contraire, le théorème d'indérivabilité donnerait $\vdash \neg \bigvee_x B(x, f)$. La preuve de (13) ne peut, à cause de (14), être transposée à $B^*(x, y)$. Ainsi la condition de dérivabilité de BERNAYS :

$$\vdash B^*(x, g^*) \rightarrow B^*(t^*(x), f)$$

où g^* est le nombre de Gödel de $\neg \bigvee_x B^*(x, \xi)$, ne peut être satisfaite par aucun terme $t^*(x)$.

CHAPITRE IV

DÉCIDABILITÉ DES THÉORIES AXIOMATIQUES

§ 13. Théories axiomatiques

La métamathématique dont nous avons traité jusqu'ici s'occupait de questions soulevées par le programme hilbertien d'une formalisation de la logique et de l'arithmétique. Le chapitre II contenait le résultat positif de GENTZEN qu'il est possible de montrer constructivement la consistance de la logique formalisée classique, dans son application à l'arithmétique. L'arithmétisation par GÖDEL des formalismes a conduit, au chapitre III, au résultat négatif que toute formalisation consistante est incomplète. Par la même occasion, nous avons prouvé le théorème de CHURCH, au terme duquel le problème de la décision de HILBERT (décider de la vérité logique de formules quelconques du calcul des quantificateurs) est insoluble au sens suivant : Il n'existe aucun procédé de décision pour la logique des quantificateurs.

Cette métamathématique hilbertienne a servi à la recherche critique des fondements de l'arithmétique. En ce qui concerne l'arithmétique, les questions posées par HILBERT ont été résolues pour l'essentiel par les résultats de GENTZEN et de GÖDEL. La situation est différente pour ce qui a trait à l'analyse et, plus généralement, à la théorie des ensembles. Il y a bien quelques tentatives vers une théorie des ensembles constructive, mais la majorité des mathématiciens ne s'en soucient guère. Il existe aussi des systèmes d'axiomes pour la théorie des ensembles mais, faute de disposer d'une théorie constructive reconnue, on ne dispose jamais d'aucun critère pour savoir si de tels systèmes formalisent en fait la théorie des ensembles, ou ne sont que pures fantaisies.

Ces recherches ne sont pas encore terminées (*cf.* FRAENKEL, BAR-HILLEL 1958). Les méthodes générales de la mathématique y jouent un rôle important, mais ici encore elles ne font que servir à l'étude critique des fondements.

En revanche en introduisant la métamathématique au sein des problèmes des mathématiques modernes, les travaux de TARSKI ont ouvert une voie nouvelle. La métamathématique de TARSKI a pour objet les théories axiomatiques des mathématiques modernes.

Ces théories axiomatiques ne sont pas nées d'une réflexion critique sur le contenu des mathématiques. Elles sont résultées de la découverte d'*identités de structures* à l'intérieur des mathématiques classiques. Les nombres entiers

et les nombres rationnels positifs en fournissent un exemple simple. Considérons l'addition des nombres entiers $k, l, \dots$. On a alors entre autres les propositions suivantes :

$$\begin{aligned}\wedge_{k,l,m} k + l + m &= k + l + m \\ \wedge_{k,l} k + l &= l + k \\ \wedge_{k,m} \vee_l k + l &= m.\end{aligned}$$

Considérons d'autre part les nombres rationnels positifs $u, v, \dots$. On a alors entre autres pour la multiplication :

$$\begin{aligned}\wedge_{u,v,w} u \cdot (v \cdot w) &= (u \cdot v) \cdot w \\ \wedge_{u,v} u \cdot v &= v \cdot u \\ \wedge_{u,w} \vee_v u \cdot v &= w.\end{aligned}$$

Ces systèmes de propositions ont la même forme. Si nous avons chaque fois utilisé les mêmes variables $x, y, \dots$ et si nous avons employé, disons le signe fonctionnel $\circ$ pour l'addition des nombres entiers et le même signe $\circ$ pour la multiplication des nombres rationnels positifs, nous aurions obtenu dans les deux cas :

$$(13.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \wedge_{x,y,z} x \circ y \circ z = x \circ y \circ z \\ \wedge_{x,y} x \circ y = y \circ x \\ \wedge_{x,z} \vee_y x \circ y = z. \end{array} \right.$$

Étant donné qu'avec n'importe quel système de propositions, valables dans un domaine quelconque des mathématiques, toutes les conséquences logiques de ce système sont aussi valables, il vaut la peine, lorsque on a trouvé des systèmes de même forme dans des domaines différents, d'étudier leurs conséquences logiques. Et ceci sans se reporter à un domaine mathématique « concret ». Cette conversion des mathématiques concrètes aux *mathématiques abstraites* ou axiomatiques est l'un des traits les plus importants des mathématiques modernes.

Deux systèmes d'axiomes différents qui impliquent logiquement les mêmes propositions (et pour cela il faut seulement qu'ils s'impliquent logiquement l'un l'autre) sont à considérer comme équivalents pour les mathématiques axiomatiques. Nous dirons qu'ils *représentent la même structure*. Au sens où nous utilisons le terme — le mot de « structure » est à la mode et souvent utilisé autrement — une structure est représentée par un système d'axiomes.

Ce sont les ensembles qui sont *porteurs* des structures. Ainsi, par exemple, l'ensemble des nombres entiers est, relativement à leur addition, porteur de

la structure représentée par (13.1). Un ensemble muni d'un système de relations et de fonctions, qui sont définies sur lui, pourrait être appelé une *variété*. L'ensemble est alors l'*ensemble de base* de la variété.

Pour formuler plus précisément dans quelles circonstances l'ensemble de base d'une variété est porteur d'une structure, nous allons procéder comme suit. Dans le système d'axiomes représentatif, les formules peuvent être composées de certaines formules et termes primitifs (éventuellement de constantes primitives). Si l'on fait correspondre de façon biunivoque aux symboles primitifs dont il est question certaines relations et fonctions (éventuellement certains éléments) d'une variété, cette correspondance portera le nom d'*interprétation* du système d'axiomes.

La variété, composée de l'ensemble de base et des relations, fonctions et éléments en correspondance avec les symboles primitifs — ou plus précisément l'interprétation, c'est-à-dire la correspondance elle-même — s'appelle alors un *modèle* du système d'axiomes si, par cette correspondance, tous les axiomes du système sont transformés en propositions vraies pour la variété. Dans ce cas alors, l'ensemble de base est dit porteur de la structure représentée par le système d'axiomes. De plus, il faut interpréter les variables d'objet qui figurent dans les axiomes comme des variables sur les éléments de l'ensemble de base de la variété et les propositions composées à l'aide des particules logiques selon l'interprétation opératoire de ces particules. On peut ainsi, pour la logique classique définir sémantiquement la vérité et la fausseté des propositions composées, comme au §6.

Si deux variétés ont même structure, si elles sont donc toutes deux modèles d'un même système d'axiomes, elles ne sont pas pour autant nécessairement isomorphes. Cela signifie que leurs éléments ne peuvent pas forcément être mis en correspondance biunivoque de sorte que les relations, les fonctions et les éléments, qui correspondent aux mêmes symboles primitifs, soient images les uns des autres. Dans l'exemple ci-dessus, la variété des nombres entiers avec leur addition et la variété des nombres rationnels positifs avec leur multiplication ne sont pas isomorphes. Si une variété est modèle d'un système d'axiomes (nous pourrions dire aussi : d'une structure) toute variété isomorphe fournit naturellement aussi un modèle. Nous dirons des variétés isomorphes qu'elles représentent le même *type*. C'est exactement en ce sens que CANTOR a introduit le terme dans ses types d'ordre. Si une variété est modèle d'une structure, nous dirons du type de la variété qu'il constitue un *modèle abstrait* de la structure.

Le lien fondamental entre les modèles d'une théorie axiomatique et les propositions qui y sont valides (c'est-à-dire les propositions composées à l'aide des joncteurs et à partir des formules primitives de la théorie et qui

découlent logiquement du système d'axiomes) est mis en évidence par le théorème de complétude de GENTZEN (1930) :

Toute proposition d'une théorie axiomatique qui est vraie dans tous les modèles du système d'axiomes (sur la base de la définition sémantique de la vérité) est une conséquence des axiomes au sens de la logique classique.

Nous ne ferons pas usage de ce théorème dans ce qui suit (*cf.* le théorème de finitude dans LORENZEN 1958, §11). Ce n'est pas un théorème de la méta-mathématique constructive. Il ne fait que résulter d'un théorème du même genre, par application de la logique classique. Pour des systèmes d'axiomes finis, le théorème ci-dessus découle — en appliquant la logique classique — de ce que :

Si une proposition de la logique des quantificateurs n'est pas logiquement vraie au sens classique, il existe un contre-modèle, c'est-à-dire une interprétation, dans lequel la proposition est (sémantiquement) fausse.

Soit, en effet, A la conjonction des axiomes d'un système fini et soit B une proposition vraie dans tous les modèles de A . $A \rightarrow B$ est alors vraie (au sens classique) dans toutes les interprétations. Si $A \rightarrow B$ n'était pas logiquement vraie, c'est-à-dire si B n'était pas une conséquence logique de A , il existerait (sous l'hypothèse du théorème qui vient d'être énoncé) un contre-modèle de $A \rightarrow B$. Cela veut dire que $A \wedge \neg B$ serait vraie dans une certaine interprétation et il existerait un modèle de A dans lequel B serait fausse.

Pour parvenir à un théorème des mathématiques constructives, nous allons renforcer l'hypothèse en remplaçant la négation « non logiquement vrai » par l'existence effective d'une contre-stratégie pour affirmer la vérité logique, autrement dit la déductibilité dans le calcul classique des quantificateurs. Nous avons prouvé de même, au §6, la complétude du semi-formalisme arithmétique sous la forme : « S'il existe une contre-stratégie pour une implication, celle-ci n'est pas valide. » On peut transposer presque mot pour mot la preuve du §6 au calcul des quantificateurs. Dans ce calcul, les termes (à l'exception des variables) disparaissent, de même que l'induction infinie. Les implications fondamentales se réduisent à :

$$F \wedge \wedge < G$$

$$F < \vee \vee G$$

$$\text{et } F \wedge c < c \vee G \text{ pour les } c \text{ atomiques.}$$

Pour soutenir la thèse qu'une implication I est déductible, le proposant P doit construire des suites spéciales d'antécédents, comme au §6. La construction doit ensuite être faite de telle sorte que :

- (1) dans une implication non critique, on choisisse comme antécédent la prémisses de l'une des règles (6.13)-(6.16), (6.17) ou (6.19),
- (2) dans une implication critique, on choisisse l'antécédent qui résulte de la substitution de $\bigwedge_x A(x) \wedge A(\xi_m)$ à tous les termes $\bigwedge_x A(x)$ et en même temps de la substitution de $\bigvee_y B(y) \vee B(\xi_n)$ à tous les termes $\bigvee_y B(y)$.

Dans ce qui précède, $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ est la suite infinie de toutes les variables et m , respectivement n , désigne le nombre des implications critiques qui se sont déjà présentées dans les antécédents et qui contiennent respectivement les termes $\bigwedge_x A(x)$ et $\bigvee_y B(y)$.

Si l'existe une contre-stratégie de l'opposant O à cette stratégie du proposant P , cela signifie que O peut forcer P , par ses « coups », à poser successivement les termes d'une suite d'antécédents de I qui, soit se termine par une implication primitive qui n'est pas une implication fondamentale, soit qui est infinie. Mais dans les deux cas, on peut construire un contre-modèle de I , c'est-à-dire une interprétation dans laquelle I n'est pas valide. Comme dans la preuve du §6, il suffit d'établir qu'une formule primitive, disons une formule primitive à 2 places $a(x, y)$, doit être interprétée par une relation binaire R entre nombres naturels qui satisfait aux conditions suivantes :

Si $a(\xi_m, \xi_n)$ figure comme antécédent dans une implication de la suite d'antécédents, $m, n \in R$,

si $a(\xi_m, \xi_n)$ figure comme conséquent, $m, n \notin R$.

Les arguments du §6 montrent alors mot à mot que l'implication de départ n'est pas valide dans cette interprétation.

Quelque restreint que le théorème de complétude classique de GÖDEL puisse ainsi apparaître dans les mathématiques constructives, il n'en reste pas moins que sa preuve fournit ce qu'il faut pour qu'on soit tenté, pour toute proposition B d'une théorie axiomatique, de donner soit (a) une dérivation de B à partir des axiomes de la théorie, soit (b) un modèle de la théorie dans lequel B soit fausse.

On ne peut, à vrai dire, affirmer (de façon effective) que l'une au moins de ces éventualités se réalise. En revanche leur réfutation effective ne peut se présenter simultanément pour les deux cas, c'est-à-dire qu'on ne peut avoir à la fois :

(a') une contre-stratégie pour l'affirmation de la déductibilité de B et

(b') une « preuve » que B est vraie dans tout modèle de la théorie (ce qu'on pourrait toujours faire). Tout ceci est contenu de façon constructive dans le théorème de complétude.

Dans la métamathématique de TARSKI, on cherche alors des procédés de décision pour les théories axiomatiques des mathématiques modernes, c'est à-dire des procédés qui décident pour toute proposition de la théorie si elle est dérivable ou non à partir des axiomes.

Comme nous l'avons vu au chapitre III, il existe des théories axiomatiques (l'arithmétique de Robinson par exemple) qui sont indécidables et le sont même essentiellement. De là résulte l'indécidabilité de nombreuses autres théories importantes des mathématiques abstraites : théories des anneaux, des corps, etc. (Cf. §14). Pour d'autres théories, en revanche, celles par exemple des corps algébriques fermés et des corps réels fermés (cf. §15), TARSKI 1948 est parvenu à donner des procédés de décision.

Qu'une théorie axiomatique soit décidable, ne signifie naturellement pas que, par là même, toutes les questions qui sont liées à son système d'axiomes et qui font l'objet des mathématiques modernes, puissent être tranchées. Le procédé de décision ne s'étend qu'aux propositions qui peuvent être construites à partir des propositions primitives de la théorie à l'aide des seules particules logiques.

Avant d'aborder les théories particulières, notons encore que le problème de décider pour une théorie axiomatique quelconque si elle est décidable ou non, est lui-même un problème indécidable. Il suffit pour le voir de considérer les théories axiomatiques T_A qui résultent de l'adjonction d'une proposition arbitraire A à l'arithmétique de Robinson. Comme celle-ci est essentiellement indécidable, T_A est indécidable si et seulement si elle est inconsistante, c'est-à-dire si $\neg A$ est dérivable dans l'arithmétique de Robinson. Toutefois la question de la dérivabilité de $\neg A$ est indécidable et, en conséquence, celle aussi de la décidabilité de T_A .

§ 14. Théories axiomatiques indécidables

Commençons par la théorie axiomatique des anneaux. Les expressions de cette théorie sont :

- (1) Certaines variables d'objet, pour lesquelles nous utiliserons les variables (syntaxiques) $x, y, \dots$
- (2) La constante primitive 1.
- (3) Les termes primitifs $(x + y)$ et $(x \cdot y)$.
- (4) Les formules primitives $x = y$.

Les termes et les formules sont construits, comme de coutume, à partir des constantes, termes et formules primitifs. Pour indiquer explicitement que toutes les propositions considérées sont des formules composées à partir des

formules primitives, exclusivement à l'aide des particules logiques, nous appellerons *théorie élémentaire* des anneaux la théorie axiomatique dont nous traitons.

Nous prendrons les axiomes suivants :

$$(14.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = x + y + z \\ x + y = y + x \\ \forall y \ x + y = z \\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \\ (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \\ z \cdot (x + y) = z \cdot x + z \cdot y \\ 1 \cdot x = x \\ x \cdot 1 = x. \end{array} \right.$$

A part le troisième, tous les axiomes (14.1) sont des théorèmes arithmétiques. Ils sont, par exemple, aisément dérivables dans l'arithmétique de Peano. Nous appellerons simplement *semi-anneaux* les modèles du système d'axiomes (14.1), sans le troisième.

Pour pouvoir prouver que la théorie élémentaire des semi-anneaux est indécidable, nous allons modifier l'arithmétique de Robinson de sorte qu'elle ait même portée que cette théorie. Dans l'arithmétique de Robinson figuraient les termes primitifs x' , $x + y$, $x \cdot y$. Mais, parce que $\vdash x + 0' = x'$, on peut se passer du terme x' , si on utilise la constante 1 au lieu de $0'$. De plus on peut inversement définir l'addition à l'aide de la fonction successeur et de la multiplication. On a en effet pour tous nombres naturels k , l et $m \neq 0$:

$$k + l = m \longleftrightarrow (k \cdot m)' \cdot (l \cdot m)' = ((k \cdot l)' \cdot (m \cdot m))'$$

comme on le vérifie immédiatement par le calcul.

Il est clair que la réduction à un, à l'addition et à la multiplication conduit à un système d'axiomes plus simple. On pourrait encore ramener la multiplication à l'élevation au carré, en s'appuyant sur :

$$k \cdot l = m \longleftrightarrow (k + l)^2 = k^2 + m + m + l^2.$$

Ceci n'offre toutefois ici aucun avantage et nous adopterons donc les axiomes suivants :

$$(14.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 1 = y + 1 \rightarrow x = y \\ \neg x + 1 = 1 \\ x = 1 \vee \forall y (x = y + 1) \\ x + y + 1 = x + y + 1 \\ 1 \cdot x = x \\ (x + 1) \cdot y = (x \cdot y) + y. \end{array} \right.$$

Ce système est constitué par des théorèmes de l'arithmétique des entiers positifs 1, 2, ... et non par des théorèmes des nombres naturels 0, 1, 2, ...

La différence avec l'arithmétique de Robinson est toutefois peu importante. Pour retrouver l'arithmétisation du §10, il suffirait de considérer les entiers positifs au lieu des nombres naturels. Nous aurions obtenu alors au §11 la représentation, dans le formalisme modifié, de toutes les relations arithmétiques, partant l'indécidabilité essentielle de la théorie axiomatique (14.2). L'indécidabilité de la théorie élémentaire des semi-anneaux s'établit alors comme suit. L'extension de (14.2) par les axiomes des semi-anneaux est consistante (puisque l'arithmétique en est un modèle). Elle est donc indécidable. En même temps, cette extension est une extension finie de la théorie des semi-anneaux et de même portée qu'elle. Cette dernière est donc elle-même indécidable, en vertu du théorème 12.5.

Cet échantillon de preuve permet d'obtenir l'indécidabilité de la théorie élémentaire des anneaux, c'est-à-dire de la théorie élémentaire avec le système d'axiomes (14.1) au complet. Il suffit d'avoir une théorie essentiellement indécidable avec un système d'axiomes fini qui admet comme modèle les nombres entiers, plus précisément la variété des nombres entiers avec l'élément unité, l'addition et la multiplication.

Il n'est pas difficile de se procurer une telle théorie. Le pas essentiel consiste à « caractériser » l'ensemble des nombres naturels (ou des nombres positifs entiers) au sein de la théorie élémentaire des nombres entiers. Cela signifie qu'il faut fournir une formule $N(x)$ de la théorie, telle que pour tout entier m on ait $N(m)$ si et seulement si m est un nombre naturel. On pourra utiliser par exemple pour cela le théorème de FERMAT, qui dit que tout nombre naturel est la somme de quatre carrés. On a en conséquence pour tout m :

$$m \geq 0 \longleftrightarrow \exists x_1, x_2, x_3, x_4 \ m = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

et cela aussi lorsque $x_1, \dots, x_4$ sont utilisés comme variables pour les entiers.

De plus, si on pose :

$$m = 0 \longleftrightarrow 1 + m = 1$$

on obtient, avec $m > 0 \longleftrightarrow \neg m = 0 \wedge m \geq 0$, une formule $P(x)$ qui caractérise les entiers positifs.

Les propositions de la théorie des entiers positifs peuvent ainsi se « traduire » en propositions de la théorie élémentaire des entiers. On y parvient en ajoutant tout d'abord aux expressions de la théorie élémentaire des entiers positifs une nouvelle formule primitive Πx , qu'on interprète par « $x > 0$ ». On remplace ensuite les axiomes (14.2) par leur forme « relativisée » :

$$(14.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi x \wedge \Pi y \wedge x + 1 = y + 1 \rightarrow x = y \\ \Pi x \rightarrow \neg x + 1 = 1 \\ \Pi x \rightarrow x = 1 \vee \bigvee_y \cdot \Pi y \wedge x = y + 1. \\ \Pi x \wedge \Pi y \rightarrow x + y + 1 = x + y + 1 \\ \Pi x \rightarrow 1 \cdot x = x \\ \Pi x \wedge \Pi y \rightarrow (x + 1) \cdot y = (x \cdot y) + y. \end{array} \right.$$

La procédure systématique de relativisation (par rapport à Π) est la suivante : introduire dans toute proposition (il faut donc préalablement lier les variables libres par des quantificateurs universels) la condition Πx pour chacun des quantificateurs $\bigwedge_x$ et $\bigvee_x$.

Ainsi :

$\bigwedge_x A(x)$ est relativisé en $\bigwedge_{\pi x} A(x)$, c'est-à-dire en $\bigwedge_x \cdot \Pi x \rightarrow A(x)$,

$\bigvee_x A(x)$ est relativisé en $\bigvee_{\pi x} A(x)$, c'est-à-dire en $\bigvee_x \cdot \Pi x \wedge A(x)$.

Rajoutons maintenant à (14.3) les expressions suivantes :

$$(14.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi 1 \\ \Pi x \wedge \Pi y \rightarrow \Pi(x + y) \\ \Pi x \wedge \Pi y \rightarrow \Pi(x \cdot y) \end{array} \right.$$

La nouvelle théorie (14.3)-(14.4) est de nouveau une modification de l'arithmétique de Robinson et aurait aussi pu être utilisée à sa place au §11. Toute dérivation d'une proposition A (sans Π) à partir de (14.2) fournit immédiatement une dérivation de la proposition relativisée ΠA à partir de (14.3)-(14.4). Que la réciproque soit aussi vraie se voit comme suit. Une dérivation de ΠA à partir de (14.3)-(14.4) devient une dérivation de A à partir de (14.2) si on y remplace toutes les formules Πt (avec un terme quelconque t) par $\vee$. Les axiomes (14.2) résultent immédiatement des axiomes (14.3) par cette substitution.

Sachant maintenant que (14.3)-(14.4) est une théorie essentiellement décidable, revenons à l'arithmétique des entiers. Pour en obtenir une axiomatisation essentiellement indécidable, « traduisons » la théorie (14.3)-(14.4) dans la théorie élémentaire des anneaux (il ne s'agit évidemment pas encore des axiomes, mais seulement des expressions).

La traduction s'obtient en faisant correspondre les formules caractéristiques $P(x)$ aux formules primitives Πx , à savoir :

$$(14.5) \quad \neg 1 + x = 1 \wedge \bigvee_{x_1, x_2, x_3, x_4} x = (x_1 \cdot x_1) + (x_2 \cdot x_2) + (x_3 \cdot x_3) + (x_4 \cdot x_4).$$

Par cette traduction, toute formule (les autres formules primitives $x = y$ et les termes primitifs 1 , $x + y$ et $x \cdot y$ restent inchangés) est transformée en une formule de la théorie des anneaux. Il est vrai que les axiomes (14.3)-(14.4) ne deviennent pas des théorèmes de la théorie des anneaux. Leur traduction cependant fournit une extension consistante de la théorie des anneaux (de même portée qu'elle). C'est la raison pour laquelle on dit d'eux qu'ils sont *traductibles de façon consistante* dans la théorie des anneaux.

On peut aussi exprimer ce fait comme suit. Si on ajoute à la théorie des anneaux les axiomes (14.3)-(14.4) et l'axiome supplémentaire

$$(14.6) \quad \Pi x \leftrightarrow P(x),$$

où $P(x)$ est la formule (14.5), on obtient une extension consistante de la théorie des anneaux (quoique n'étant pas, en général, de même portée qu'elle). Les nombres entiers constituent un modèle de l'extension et c'est tout ce qu'on exige ici des axiomes d'un anneau. Nous appellerons aussi cette extension de la théorie des anneaux par (14.6) et (14.3)-(14.4) une *traduction consistante* de la théorie (14.3)-(14.4) dans la théorie des anneaux.

L'existence d'une traduction consistante d'une théorie essentiellement indécidable, et qui a un nombre fini d'axiomes, dans une autre théorie implique sans plus l'indécidabilité de la seconde théorie. La traduction fournit, en effet, une extension consistante de la première théorie et cette extension est ainsi indécidable. C'est en même temps — si les expressions sont les mêmes — une extension finie, consistante et de même portée que la seconde théorie. Celle-ci est donc aussi indécidable.

Ceci ne fournit toutefois pas l'indécidabilité essentielle de la seconde théorie. La théorie des anneaux, par exemple, n'est pas essentiellement indécidable et nous en verrons des extensions décidables au §15.

Si on étend la théorie des anneaux par des axiomes tels que les nombres entiers en constituent encore un modèle, l'indécidabilité se conserve (en vertu de la preuve qui précède). On établit ainsi, par exemple, l'indécidabilité de la théorie élémentaire des anneaux commutatifs en ajoutant :

$$(14.7) \quad x \cdot y = y \cdot x$$

et celle des domaines d'intégrité en ajoutant encore :

$$(14.8) \quad x \cdot y = 0 \rightarrow x = 0 \vee y = 0.$$

Si l'on supprime certains axiomes, l'indécidabilité se conserve aussi longtemps que la théorie reste de même portée. En revanche, si on limite les expressions, si par exemple on abandonne la multiplication et qu'on ne conserve que les trois premiers axiomes de (14.1), on parvient alors à la

théorie élémentaire des groupes commutatifs. Or, comme W. SZMIELEW 1955 l'a montré dans un travail extrêmement ingénieux, celle-ci est décidable. Toutefois la théorie des groupes est de nouveau indécidable (TARSKI 1953).

Les considérations qui précèdent ne disent rien sur la théorie élémentaire des corps, celle-ci résultant de la théorie des anneaux commutatifs par l'adjonction de :

$$(14.9) \quad \neg 1 + x = 1 \rightarrow \bigvee_y x \cdot y = z.$$

Malheureusement les nombres entiers ne fournissent aucun modèle pour (14.9). Pour arriver à l'indécidabilité de la théorie élémentaire des corps, on peut cependant répéter la méthode qui vient d'être utilisée. On construira un système d'axiomes fini et essentiellement indécidable pour l'arithmétique des nombres rationnels. Pour cela, on commencera par caractériser les entiers à l'aide d'une formule élémentaire de l'arithmétique des rationnels. J. ROBINSON 1949 a montré la possibilité d'une telle caractérisation. Il utilise des théorèmes de la théorie des nombres, relatifs aux formes quadratiques, qu'il emprunte à la thèse de H. HASSE 1923 et que nous n'énoncerons pas.

L'intervention de théorèmes purement mathématiques et aussi profonds dans la métamathématique est un signe indéniable de l'étroitesse des liens qui existent entre la métamathématique de TARSKI et les mathématiques elles-mêmes.

Si l'on dispose d'une formule $G(x)$ de l'arithmétique élémentaire des nombres rationnels, telle que $1 \mid x \longleftrightarrow G(x)$ ($1 \mid x$ = df « 1 divise x » ou « x est entier »), on étend alors comme plus haut le système d'axiomes essentiellement indécidable (14.3), (14.4), (14.6) à l'aide d'une nouvelle formule primitive Γx , en posant :

$$(14.10) \quad \Gamma x \longleftrightarrow G(x).$$

Au lieu de relativiser le système d'axiomes par rapport à Γ — il l'est déjà par rapport à Π — il suffit visiblement d'introduire encore :

$$(14.11) \quad \Pi x \rightarrow \Gamma x.$$

Il en résulte un système d'axiomes essentiellement indécidable dont les nombres rationnels constituent un modèle. Si nous ajoutons, par exemple, les axiomes d'un corps, le système reste consistant et est donc encore indécidable.

Comme le système (14.3), (14.4), (14.6), (14.10) et (14.11) est essentiellement indécidable, l'indécidabilité se conserve par adjonction d'axiomes avec de nouveaux symboles primitifs, aussi longtemps que ceux-ci n'admettent que le modèle des rationnels.

L'extension avec une constante primitive 0 et avec les axiomes

$$(14.12) \quad \begin{cases} x + 0 = x \\ \neg 0 = 1 \end{cases}$$

est triviale.

Une classe d'axiomes importante pour les mathématiques modernes, qui relève aussi de ceci, est celle des axiomes d'ordre. Soit un symbole primitif $\leq$. Considérons le système d'axiomes suivant :

$$(14.13) \quad \begin{cases} x \leq y \vee y \leq x \\ x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z \\ x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y \\ x \leq y \rightarrow x + z \leq y + z \\ \neg z \leq 0 \wedge x \leq y \rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z. \end{cases}$$

Les trois premiers axiomes représentent la structure d'*ordre total*. Une variété, qui est un anneau et qui satisfait en même temps tous les axiomes de (14.13) se nomme un *anneau totalement ordonné*. Les nombres rationnels (relativement à leur relation d'ordre) constituent un anneau totalement ordonné qui, de plus, est *dense*. Pour exprimer formellement la densité, posons l'abréviation :

$$x < y \Leftrightarrow x \leq y \wedge \neg x = y.$$

L'axiome de densité s'écrit alors :

$$(14.14) \quad x < y \rightarrow \forall z \cdot x < z \wedge z < y.$$

D'après ce qui précède, la théorie élémentaire des corps totalement ordonnés (denses) est indécidable. Il en est de même pour la théorie élémentaire des anneaux totalement ordonnés. Les nombres entiers suffisent déjà ici comme modèle. Toutefois les entiers ne connaissent pas un ordre dense et la négation de (14.14) leur est applicable :

$$(14.15) \quad \forall x, y \cdot x < y \wedge \neg \forall z \cdot x < z \wedge z < y..$$

Ainsi la théorie élémentaire des anneaux totalement ordonnés non denses est aussi indécidable.

On a même dans ce cas, selon MOSTOWSKI et TARSKI (1953) l'indécidabilité essentielle. La preuve consiste à « traduire » une théorie qu'on sait être essentiellement indécidable dans la théorie des anneaux totalement ordonnés non denses. Si on parvient à une traduction telle qu'il en résulte — comme dans les cas traités jusqu'ici — non seulement une extension consistante,

mais encore une extension conservante, nous parlerons d'une *traduction conservante*. Nous allons montrer que l'arithmétique relativisée de Robinson admet une traduction conservante dans la théorie élémentaire des anneaux commutatifs totalement ordonnés et non denses.

On peut tout d'abord déduire des axiomes de cette théorie que :

$$\bigvee_t . 0 < t \wedge \bigwedge_z . 0 < z \rightarrow t \leq z..$$

Si nous abrégeons cette formule en $\bigvee_t p(t)$, il vient :

$$p(t_1) \wedge p(t_2) \rightarrow t_1 = t_2.$$

Il est donc possible de travailler dans la théorie avec un descripteur de la forme :

$$\tau = \iota_t p(t).$$

Ici τ désigne le plus petit élément positif.

Considérons l'arithmétique de Robinson relativisée par rapport à N avec les termes primitifs $0, x', x + y, x \cdot y$, les formules primitives Nx (« x est un nombre naturel ») et $x = y$. Remplaçons $x \cdot y$ par $x \circ y$. Nous allons traduire $x', x \circ y$ et Nx dans la théorie élémentaire des anneaux ordonnés. Nous utiliserons pour cela :

$$(14.16) \quad \begin{cases} Nu \leftrightarrow 0 \leq u \wedge \bigvee_x u = x \cdot \tau \\ u' = u + \tau \\ u \circ v = w \leftrightarrow \bigvee_{x,y} . u = x \cdot \tau \wedge v = y \cdot \tau \wedge w = (x \cdot y) \cdot \tau. \end{cases}$$

L'extension de la théorie élémentaire de nos anneaux par (14.16) et par les axiomes de l'arithmétique relativisée de Robinson est conservante. Cela signifie que les traductions des axiomes relativisés de Robinson dans la théorie des anneaux doivent être dérivables. Comme $u \circ v$ est un terme dans l'arithmétique de Robinson, il faut montrer d'abord pour la troisième ligne de (14.16) que le membre de droite détermine univoquement pour tous u et v avec $Nu \wedge Nv$ un w avec Nw . Cela découle de ce que pour tout u avec Nu , un x est univoquement déterminé par $u = x \cdot \tau$:

$$x_1 \cdot \tau = x_2 \cdot \tau \rightarrow x_1 = x_2$$

$$\text{car } x_1 < x_2 \rightarrow x_1 \cdot \tau < x_2 \cdot \tau$$

comme il est facile de s'en assurer.

Il nous faut maintenant traduire les axiomes de l'arithmétique relativisée de Robinson et les dériver dans la théorie des anneaux. Considérons tout d'abord les axiomes suivants :

$$(14.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} N 0 \\ N u \rightarrow N u' \\ N u \wedge N v \rightarrow N (u + v) \\ N u \wedge N v \rightarrow N (u \circ v). \end{array} \right.$$

Pour la première ligne, il suffit de remarquer la dérivabilité de $0 = 0 \cdot \tau$. De même, pour les deux lignes suivantes la déductibilité de

$$\begin{aligned} u = x \cdot \tau &\rightarrow u + \tau = (x + 1) \cdot \tau \\ u = x \cdot \tau \wedge v = y \cdot \tau &\rightarrow u + v = (x + y) \cdot \tau \end{aligned}$$

suffit. Le cas de la quatrième ligne est trivial.

Il reste encore à dériver les traductions des sept axiomes de Robinson, avec les conditions supplémentaires Nu , Nv , ... pour les variables qui y figurent.

$$(14.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} u + \tau = v + \tau \rightarrow u = v \\ \neg u + \tau = 0 \\ u = 0 \vee \bigvee_v u = v + \tau \\ u + 0 = u \\ u + (v + \tau) = (u + v) + \tau \\ 0 \circ u = 0 \\ (u + \tau) \circ v = (u \circ v) + v. \end{array} \right.$$

Pour le deuxième axiome, il faut considérer $0 < \tau$ et $0 \leq u$. Pour le troisième, $\neg u = 0$ entraîne d'abord $\tau \leq u$. De $u = x \cdot \tau$ suit alors $\bigvee_y u = y \cdot \tau + \tau$ par $\bigvee_y x = y + 1$ et enfin $0 \leq y \cdot \tau$.

Pour l'avant-dernier axiome, $y = 0 \rightarrow x \cdot y = 0$ suffit et le dernier demande, pour $u = x \cdot \tau$ et $v = y \cdot \tau$, les calculs suivants :

$$\begin{aligned} u + \tau &= x \cdot \tau + \tau \\ &= (x + 1) \cdot \tau \\ \text{et} \quad (u + \tau) \circ v &= ((x + 1) \cdot y) \cdot \tau \\ &= ((x \cdot y) + y) \cdot \tau \\ &= (x \cdot y) \cdot \tau + y \cdot \tau \\ &= u \circ v + v \end{aligned}$$

Cette traduction conservante d'une théorie essentiellement indécidable dans la théorie élémentaire des anneaux commutatifs non denses et totalement ordonnés fait voir que cette dernière est aussi essentiellement indécidable. Elle est tout d'abord certainement indécidable, puisque elle possède une extension conservante indécidable. De plus la chose est vraie de toutes ses extensions consistantes.

Les résultats du chapitre III conduisent, par les méthodes que nous venons d'indiquer, à toute une série de théories indécidables. Les résultats de TARSKI sur la décidabilité de certaines théories axiomatiques des mathématiques modernes n'en sont que plus remarquables. Ils vont faire l'objet de notre dernier paragraphe.

§ 15. Théories axiomatiques complètes

Nous allons tout d'abord illustrer sur un exemple simple la méthode de l'élimination des quantificateurs par laquelle TARSKI prouve ses théorèmes de décidabilité.

Considérons l'arithmétique des nombres naturels, réduite à la seule égalité. Les termes y sont donc seulement les variables $x, y, \dots$ et les formules primitives $x = y$ (à l'exception de $\forall$ et $\wedge$). Nous écrivons $x \neq y$ pour $\neg x = y$.

Les axiomes de la théorie sont ceux d'égalité :

$$(15.1) \quad \begin{cases} x = x \\ x = z \wedge y = z \rightarrow x = y \end{cases}$$

et, pour tout n :

$$(15.2) \quad \forall x. x \neq y_1 \wedge \dots \wedge x \neq y_n.$$

Pour expliquer ces axiomes (15.2), montrons d'abord qu'ils sont dérivables dans les formalismes arithmétiques. Il suffit pour cela de dériver l'adjonction :

$$0 \neq y_1 \wedge \dots \wedge 0 \neq y_n \vee 1 \neq y_1 \wedge \dots \wedge 1 \neq y_n \vee \dots \vee n \neq y_1 \wedge \dots \wedge n \neq y_n$$

dans laquelle nous avons écrit 1, 2, ... au lieu de $0', 0'', \dots$. Sous forme normale conjonctive, cette formule est une conjonction de termes de la forme :

$$0 \neq y_{v_0} \vee 1 \neq y_{v_1} \vee \dots \vee n \neq y_{v_n}$$

avec $v_0, v_1, \dots, v_n \in \{1, \dots, n\}$. D'après le « théorème du tiroir », chaque terme comprend au moins deux formules $k \neq y$ et $l \neq y$, avec la même variable y et $\vdash k \neq l$. Puisque $\vdash k = y \wedge l = y \rightarrow k = l$, il s'ensuit que l'expression $k \neq y \vee l \neq y$ est dérivable. Chaque terme de la conjonction est ainsi dérivable et partant (15.2) l'est aussi.

On cherche, pour ce fragment d'arithmétique qui relève des axiomes (15.1)-(15.2), un procédé qui permette de décider de la dérivabilité de toute formule de la théorie. Pour cela les formules doivent être mises sous forme normale et d'abord sous *forme normale prénexe* XA , où A est une formule de la logique des joncteurs (c'est-à-dire composée à partir des formules primi-

tives sans les quantificateurs) et X , le préfixe, une suite de quantificateurs universels ou existentiels dans un ordre quelconque.

Si le préfixe ne contient qu'un seul quantificateur, on cherche une méthode pour remplacer la formule par une formule équivalente de la logique des joncteurs et qui, par rapport à la formule de départ, ne contienne aucune nouvelle variable libre. Dès qu'on a trouvé une telle méthode, son itération à une proposition quelconque (donc sans variable libre) en forme normale prénexe conduit à une proposition équivalente de la logique des joncteurs. Le procédé de décision est alors trivial, les propositions primitives ne sont en effet que $\vee$ et $\wedge$.

Grâce à la relation $\bigwedge_x A(x) \leftrightarrow \neg \bigvee_x \neg A(x)$, il est possible de se limiter aux formules de la forme $\bigvee_x A(x)$, où $A(x)$ est une formule de la logique des joncteurs. On met $A(x)$ sous forme normale adjonctive, c'est-à-dire sous forme d'une adjonction équivalente de *conjonctions de base* (il s'agit de conjonctions dont les termes sont les formules de base $x = y$ ou $x \neq y$).

On a alors :

$$\bigvee_x A(x) \leftrightarrow \bigvee_x B_1(x) \vee \dots \vee \bigvee_x B_n(x)$$

avec les conjonctions de base $B_1(x), \dots, B_n(x)$.

Chacune des conjonctions de base peut encore être normalisée (par rapport à x) de la façon suivante :

$$x = y_1 \wedge \dots \wedge x = y_m \wedge x \neq z_1 \wedge \dots \wedge x \neq z_n \wedge B$$

où B ne contient pas la variable x .

Il ne reste ainsi qu'à réaliser l'élimination des quantificateurs pour les formules

$$\bigvee_x . x = y_1 \wedge \dots \wedge x = y_m \wedge x \neq z_1 \wedge \dots \wedge x \neq z_n .$$

Il faut distinguer ici les cas suivants :

- (1) $m > 0, n > 0$
- (2) $m > 0, n = 0$
- (3) $m = 0, n > 0$.

Nous pouvons admettre qu'aucune des variables $y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n$ n'est la variable x , puisque

$$\begin{aligned} x = x &\leftrightarrow \vee \\ x \neq x &\leftrightarrow \wedge. \end{aligned}$$

Les cas où $m > 0$ peuvent se ramener à $m = 1$ grâce à :

$$x = y_1 \wedge \dots \wedge x = y_m \leftrightarrow x = y_1 \wedge y_1 = y_2 \wedge \dots \wedge y_1 = y_m.$$

Le cas (1) se traite par

$$\bigvee_x . x = y \wedge x \neq z_1 \wedge \dots \wedge x \neq z_n \leftrightarrow y \neq z_1 \wedge \dots \wedge y \neq z_n,$$

le cas (2) par

$$\bigvee_x x = y \leftrightarrow \vee$$

et le cas (3), en vertu de (15.2), par

$$\bigvee_x . x \neq z_1 \wedge \dots \wedge x \neq z_n \leftrightarrow \vee.$$

Avec cette élimination des quantificateurs, on a même prouvé plus que la décidabilité : on a montré comment il est possible de décider, pour toute proposition A de la théorie, si on a $\vdash A$ ou $\vdash \neg A$. Ainsi, non seulement la théorie élémentaire de l'égalité arithmétique est décidable, elle est même complète. On peut même proprement parler d'une complétude effective, puisque la décision entre $\vdash A$ et $\vdash \neg A$ peut être établie de façon effective.

On n'obtient pas cette effectivité si, pour prouver la complétude, on suit le chemin très voisin suivant. Considérons les modèles de la théorie. Pour qu'un ensemble M puisse être l'ensemble de base d'un modèle de la théorie, il suffit d'exiger qu'il existe une infinité d'éléments en M . Le symbole primitif $=$ de la théorie sera alors interprété comme l'égalité en M . (De tels modèles peuvent être dits *modèles à égalité logique*. Si on interprète $=$ par une égalité totalement abstraite quelconque $\sim$ en M , les *abstracta* relatifs à $\sim$ constituent une interprétation à égalité logique.)

Puisque M possède une infinité d'éléments, les axiomes (15.1)-(15.2) sont, comme nous l'avons montré, vrais en M . Si maintenant, pour une proposition A de la théorie, ni A ni $\neg A$ n'étaient dérivables, il existerait (au sens classique) d'après le théorème de complétude de GÖDEL, un modèle infini M_+ , dans lequel A serait vraie et un modèle infini M_- dans lequel $\neg A$ serait vraie. (Si on développe ces considérations dans la cadre d'une théorie axiomatique des ensembles, on remarque qu'il est encore possible de choisir des modèles dénombrables. En revanche, pour les mathématiques constructives qui n'ont affaire qu'à des expressions finies qui doivent pouvoir être construites selon des règles données la remarque est superflue.) Il y aurait une correspondance biunivoque entre M_+ et M_- . Comme $=$ est le seul symbole primitif, cette correspondance est un isomorphisme pour les modèles de la théorie. Une dérivation (sémantique) de la vérité de A dans M_+ correspondrait ainsi par l'isomorphisme à une dérivation (sémantique) de A dans M_- . Il en résulterait une contradiction et la complétude (au sens classique) est ainsi établie.

On est ici en présence du cas où tous les modèles d'une théorie sont isomorphes et il n'existe alors qu'un seul type de modèles abstraits. On nomme

de telles théories *monomorphes*. (Dans la théorie axiomatique des ensembles, il suffirait de définir la monomorphie pour des modèles de même cardinalité.)

De la monomorphie (dans le dénombrable) découle classiquement la complétude et donc, de l'incomplétude des formalismes arithmétiques, leur polymorphie (SKOLEM 1933). En revanche, selon CANTOR, la théorie des ordres totaux non bornés denses est monomorphe. *Non borné* veut dire qu'on exige que :

$$\bigwedge_y \bigvee_{x,z} \cdot x < y \wedge y < z.$$

Pour les mathématiques constructives, la complétude classique de cette théorie donne à penser qu'il est possible de trouver un procédé de décision pour la complétude effective. Nous renonçons néanmoins à développer la chose. Selon CANTOR, on a en tous cas l'*isonomie* de la théorie : tous ses modèles sont isonomes, c'est-à-dire que la classe des propositions élémentaires vraies est la même pour tous les modèles. Au sens classique, cette isonomie est équivalente à la complétude.

Le passage de la monomorphie à la complétude (ou au moins à l'isonomie) ne peut se renverser. Un exemple important est fourni par la théorie des corps algébriques fermés. Pour être brefs, nous entendrons toujours dans ce qui suit par « corps » un corps commutatif de caractéristique 0. *De caractéristique 0* signifie qu'on ajoute aux axiomes les conditions :

$$(15.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 + 1 \neq 0 \\ 1 + 1 + 1 \neq 0 \\ 1 + 1 + 1 + 1 \neq 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right.$$

Nous utiliserons de plus les abréviations suivantes :

$$\begin{array}{l} x^2 \Leftarrow x \cdot x \\ x^3 \Leftarrow x \cdot x \cdot x \\ \vdots \\ \vdots \end{array}$$

La fermeture algébrique est alors représentée par l'axiome :

$$(15.4) \quad \forall_x x^n + z_1 \cdot x^{n-1} + \dots + z_n = 0 \text{ pour tout } n > 0.$$

Pour prouver la complétude effective de cette théorie, quelques connaissances élémentaires d'algèbre seront nécessaires. Il faut tout d'abord savoir que

la théorie est consistante, parceque les nombres algébriques en constituent un modèle. (Nous évitons ici le modèle de « tous » les nombres complexes, celui-ci n'étant défini en effet que dans le cadre de la théorie axiomatique des ensembles.)

Que la théorie ne soit pas monomorphe, mais polymorphe, découle de ce que des corps algébriques fermés ne sont isomorphes que s'ils possèdent le même degré de transcendance. Le corps K des nombres algébriques, par exemple, a un degré de transcendance égal à 0, la fermeture algébrique de $K(\xi)$ — avec ξ indéterminé — a un degré de transcendance égal à 1.

Dans le cadre de la théorie axiomatique des ensembles, on peut, à l'aide des nombres cardinaux, prouver de la façon suivante une complétude de cette théorie. Soit κ un nombre cardinal transfini. Tous les corps de nombre cardinal κ ont alors leur degré de transcendance égal à κ et tous les modèles de ce nombre cardinal sont ainsi isomorphes.

Supposons maintenant de nouveau que, pour une proposition A , ni A ni $\neg A$ ne soient dérivables et soit M_+ (M_-) un modèle dans lequel A ($\neg A$) est vraie. La caractéristique 0 entraîne que les modèles sont infinis et on peut sans plus admettre que les deux modèles sont de nombre cardinal κ (cf. à ce sujet A. ROBINSON 1951). Ceci conduit à la contradiction souhaitée.

Bien que la consistance de la théorie axiomatique des ensembles, que nous utilisons ici, n'ait jusqu'ici pas été prouvée, ce résultat justifie au moins la conjecture de la complétude effective de la théorie élémentaire des corps algébriques fermés.

En fait, la méthode de l'élimination des quantificateurs conduit ici encore rapidement au but. Pour simplifier les écritures, nous utiliserons en plus de 0 et 1, la constante -1 . On peut toujours l'éliminer par le descripteur :

$$-1 = \iota_x(x + 1 = 0).$$

Au lieu de $x + (-1) \cdot y$ nous écrirons simplement $x - y$. Toutes les formules primitives $s_1 = s_2$ de la théorie (s_1 et s_2 sont des termes quelconques) peuvent alors se mettre sous la forme $s = 0$, en posant $s = s_1 - s_2$.

Nous prendrons donc comme formules de base $s = 0$ et $s \neq 0$. Toute formule de la logique des joncteurs est une adjonction de conjonctions de ces formules de base.

Puisque

$$t_1 \neq 0 \wedge t_2 \neq 0 \leftrightarrow t_1 \cdot t_2 \neq 0,$$

les conjonctions de base peuvent se mettre sous la forme normale

$$s_1 = 0 \wedge s_2 = 0 \wedge \dots \wedge s_m = 0 \wedge t \neq 0,$$

éventuellement avec $m = 0$. Nous écrirons simplement :

$$s_1 = s_2 = \dots = s_m = 0 \neq t.$$

L'élimination des quantificateurs se réduit alors à transformer les formules

$$\forall x. s_1 = s_2 = \dots = s_m = 0 \neq t$$

en formules équivalentes de la logique des joncteurs avec les mêmes variables libres. Nous pouvons encore admettre que la variable x figure dans les termes $s_1, \dots, s_m$. Nous remplacerons toujours un terme, dans lequel figure x , par sa forme normale qui sera un polynôme en x :

$$t_0 \cdot x^n + t_1 \cdot x^{n-1} + \dots + t_n.$$

Ici les coefficients $t_0, \dots, t_n$ sont des termes qui ne contiennent pas la variable x .

On sait calculer, par un algorithme algébrique bien connu, le plus grand commun diviseur s des polynômes en x : $s_1, \dots, s_m$. s est un polynôme en x ou un terme dans lequel x ne figure pas.

Distinguons maintenant les cas suivants :

- (1) $m > 0$, t est un polynôme en x ,
- (2) $m > 0$, t n'est pas un polynôme en x ,
- (3) $m = 0$, t est un polynôme en x .

Dans le cas (1), la condition

$$\forall x. s_1 = s_2 = \dots = s_m = 0 \neq t$$

équivalait à dire qu'un zéro du plus grand commun diviseur s de $s_1, \dots, s_m$ n'est pas un zéro de t . Il existe un algorithme pour, s étant donné, calculer un polynôme $\bar{s}$ qui a les mêmes zéros que s , mais tous d'ordre de multiplicité 1. La formule ci-dessus est ainsi équivalente à : $\neg \bar{s} \mid t$, soit $\bar{s}$ n'est pas diviseur de t .

L'algorithme, qui permet de décider si un polynôme en x est diviseur d'un autre, fournit la formule cherchée de la logique des joncteurs à partir des coefficients des polynômes $\bar{s}$ et t .

Le cas (2) se réduit à $\forall x. s_1 = s_2 = \dots = s_m = 0$, c'est-à-dire à $\forall x. s = 0$.

Si s est un polynôme en x de coefficients $t_0, \dots, t_n$, cette formule est équivalente, d'après (15.4), à $t_0 \neq 0 \vee \dots \vee t_{n-1} \neq 0 \vee t_n = 0$.

Dans le cas (3), $\forall x. t \neq 0$ équivaut à $t \neq 0$, pour l'un au moins des coefficients t_ν ($\nu \geq 0$). (En effet, t a alors au plus un nombre fini de zéros, tandis qu'il existe une infinité d'éléments dans le corps.)

Le procédé de décision est ainsi déterminé. Toute proposition A de la théorie est transformée par l'élimination des quantificateurs en une proposition équivalente de la logique des joncteurs. Les termes d'une proposition A de la logique des joncteurs ne sont composés qu'à partir de 0, 1 et -1 . Il est ainsi facile de décider entre $\vdash A$ et $\vdash \neg A$.

De la complétude découle le cas particulier de l'isonomie, connu sous le nom de *principe de LEFSCHETZ*: Si une proposition élémentaire est vraie dans un corps de nombres algébriques fermé, elle l'est aussi dans tout corps algébrique fermé de caractéristique 0.

Il n'est pas nécessaire ici de restreindre les propositions élémentaires aux propositions de la théorie axiomatique des corps. Si en effet $A_1, A_2, \dots$ est une suite de telles propositions élémentaires au sens étroit, le principe est encore manifestement valable pour les propositions $\bigwedge_n A_n$ et $\bigvee_n A_n$. Cette quantification arithmétique peut être réitérée en composition avec des joncteurs et conduit alors à une classe de *propositions arithmétiques élémentaires*. L'isonomie reste acquise.

Examinons enfin le procédé de décision de TARSKI pour la théorie élémentaire des corps réels fermés. Un corps est dit *formellement réel* si on a :

$$(15.5) \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0 \wedge \dots \wedge x_n = 0 \text{ pour tout } n.$$

Un tel corps est toujours de caractéristique 0.

Un corps totalement ordonné est toujours formellement réel et on l'appelle *réel fermé* s'il satisfait, pour chacun de ses termes $s(x)$, l'axiome suivant :

$$(15.6) \quad x < z \wedge s(x) < 0 < s(z) \rightarrow \bigvee_y \cdot x < y < z \wedge s(y) = 0.$$

Les nombres algébriques réels sont un modèle de cette structure de corps. Ici non plus, rien n'oblige de faire appel à la théorie de CANTOR-DEDEKIND de « tous » les nombres réels, ce qui ne pourrait se concevoir que dans le cadre d'une théorie axiomatique des ensembles.

Quant au procédé de décision, il faut encore transformer les formules $\bigvee_x B(x)$, où $B(x)$ sont les conjonctions de base, en formules équivalentes de la logique des joncteurs (sans nouvelles variables libres). On prend $x = y$ et $x < y$ comme formules atomiques, ce qui suffit étant donné qu'on a :

$$x \leq y \leftrightarrow x < y \vee x = y.$$

Ces mêmes formules peuvent d'ailleurs servir de formules de base. Elles suffisent en effet à exprimer la négation des formules primitives :

$$\neg x = y \leftrightarrow x < y \vee y < x$$

$$\neg x < y \leftrightarrow y \leq x.$$

Comme $x < y \leftrightarrow 0 < y - x$, les conjonctions de base sous forme normale deviennent :

$$s_1 = 0 \wedge \dots \wedge s_m = 0 \wedge 0 < t_1 \wedge \dots \wedge 0 < t_n.$$

Et comme on a

$$s_1 = 0 \wedge \dots \wedge s_m = 0 \leftrightarrow s_1^2 + \dots + s_m^2 = 0,$$

on peut encore écrire les formes normales :

$$s = 0 \wedge t_1 > 0 \wedge \dots \wedge t_n > 0.$$

Nous devons ainsi éliminer les quantificateurs des formules :

$$\forall x. s = 0 \wedge t_1 > 0 \wedge \dots \wedge t_n > 0.$$

Pour cela nous distinguerons les cas suivants :

- (1) s est un polynôme en x et $n \leq 1$.
- (2) s est un polynôme en x et $n > 1$.
- (3) s n'est pas un polynôme en x et $n > 0$.

Dans les deux premiers cas, nous effectuerons l'élimination pour $\forall x B(x)$ en donnant un procédé de calcul pour le nombre $N_x B(x)$ des x qui satisfont $B(x)$. Si le polynôme en x est de degré m (c'est-à-dire si x^m est sa plus haute puissance), ce nombre est au plus égal à m . On a donc :

$$\forall x B(x) \leftrightarrow N_x B(x) = 1 \vee N_x B(x) = 2 \vee \dots \vee N_x B(x) = m.$$

Le procédé de calcul doit être formulé de telle sorte qu'on voie sans autre comment, pour tout $l \leq m$, il est possible de parvenir à une formule de la logique des joncteurs qui est équivalente à $N_x B(x) = l$.

Si $n = 0$, l'algorithme de STURM fournit un tel procédé pour le cas (1). Il a été généralisé par TARSKI pour englober aussi le cas où $n = 1$. Ainsi si s et t sont des termes quelconques, s au moins étant un polynôme en x , on cherche un procédé de calcul pour $N_x (s = 0 < t)$. Il suffit pour cela de supposer que s et t n'ont pas de diviseur commun. (On calcule le plus grand commun diviseur de s et t et on simplifie. Seuls tombent les x avec $s = 0 = t$.) On peut de même supposer que s n'a pas de solution multiple.

A partir de s , on calcule alors un polynôme dérivé en x s' qui, pour le polynôme

$$t_0 \cdot x^m + t_1 \cdot x^{m-1} + \dots + t_m$$

est défini par

$$mt_0 \cdot x^{m-1} + (m-1)t_1 \cdot x^{m-2} + \dots + t_{m-1}.$$

(Les multiples lt d'un terme t sont naturellement définis par $1t = t$, $2t = t + t$, etc.)

On appliquera enfin à s et à $s' \cdot t$ un algorithme d'Euclide modifié. Cela veut dire qu'on calculera des termes $s_0, s_1, s_2, \dots, s_l$ et $q_1, q_2, \dots, q_l$ de telle façon que, en partant de $s_0 = s$ et $s_1 = s' \cdot t$, on ait :

$$\begin{aligned} s_0 &= s_1 \cdot q_1 - s_2 \\ s_1 &= s_2 \cdot q_2 - s_3 \\ &\dots \\ s_{l-2} &= s_{l-1} \cdot q_{l-1} - s_l \\ s_{l-1} &= s_l \cdot q_l \end{aligned}$$

Ces termes sont univoquement déterminés, puisque les degrés des polynômes en x $s_1, s_2, \dots, s_l$ sont strictement décroissants :

$$\text{degré } s_1 > \text{degré } s_2 > \dots > \text{degré } s_l.$$

Si $\text{degré } s_0 < \text{degré } s_1$, alors $q_1 = 0$.

Comme s n'a pas de solution multiple, s et s' n'ont pas de diviseur commun. Et comme s et t n'ont pas de diviseur commun, il en est de même pour s et $s' \cdot t$. Ainsi s_l est un terme non nul qui ne contient plus x .

La suite des polynômes de STURM $s_0(x), s_1(x), \dots, s_l(x)$ permet tout d'abord d'obtenir :

$$(15.7) \quad \begin{cases} s(x) = 0 < t(x) \rightarrow s_0(x-u) \cdot s_1(x-u) < 0 \\ s(x) = 0 < t(x) \rightarrow s_0(x+u) \cdot s_1(x+u) > 0 \\ s(x) = 0 > t(x) \rightarrow s_0(x-u) \cdot s_1(x-u) > 0 \\ s(x) = 0 > t(x) \rightarrow s_0(x+u) \cdot s_1(x+u) < 0 \end{cases}$$

à condition qu'on suppose u positif et « suffisamment petit ». Il faut donc faire précéder les formules (15.7) de la condition :

$$\bigvee_v \bigwedge_u \cdot 0 < u < v \rightarrow v > 0$$

La preuve fait usage de la formule de TAYLOR avec, pour reste, un polynôme $r(x, u)$ de la forme :

$$s(x+u) = s(x) + u s'(x) + u^2 r(x, u).$$

Si $s(x) = 0$, il vient :

$$\begin{aligned} s(x-u) &= -u s'(x) + u^2 r(x, -u) \\ s(x+u) &= u s'(x) + u^2 r(x, u) \end{aligned}$$

ce qui, avec $s'(x) \neq 0$, donne bien (15.7).

On peut ensuite dériver

$$(15.8) \quad \neg. s_j(x) = 0 \wedge s_{j+1}(x) = 0. \quad (j = 0, \dots, l-1)$$

puisqu'en sinon on aurait $s_l(x) = 0$.

La formule :

$$(15.9) \quad s_j(x) = 0 \rightarrow s_{j-1}(x) \cdot s_{j+1}(x) < 0 \quad (j = 1, \dots, l-1)$$

découle alors de l'équation $s_{j-1} = s_j \cdot q_j - s_{j+1}$.

On peut maintenant trouver le nombre des solutions en cherchant celui des « changements de signes » de la suite de STURM. Il faut pour cela « compter » les indices $j > 0$ pour lesquels on a $s_j(x) \neq 0$ et $s_{j-1}(x) \cdot s_j(x) \leq 0$. Ce nombre est au plus égal à l . Donc

$$N_j (s_j(x) \neq 0 \wedge s_{j-1}(x) \cdot s_j(x) \leq 0) = k \quad (k = 0, \dots, l)$$

s'exprimera par une formule de la logique des joncteurs qui, à part les variables libres qui figurent en tout cas dans les coefficients des polynômes, contient encore x . Ainsi, par exemple,

$$N_j (s_j(x) \neq 0 \wedge s_{j-1}(x) \cdot s_j(x) \leq 0) = 0$$

s'exprimera par :

$$\neg. s_1 \neq 0 \wedge s_0 \cdot s_1 \leq 0. \wedge \neg. s_2 \neq 0 \wedge s_1 \cdot s_2 \leq 0. \wedge \dots \\ \wedge \neg. s_l \neq 0 \wedge s_{l-1} s_l \leq 0.$$

Posons maintenant — pour notre raisonnement métamathématique — que $k(x)$ est tout justement le k pour lequel la formule qui exprime que

$$N_j (s_j(x) \neq 0 \wedge s_{j-1}(x) \cdot s_j(x) \leq 0) = k$$

est dérivable.

La généralisation de TARSKI du théorème de STURM permet de dériver, sous les conditions $x_0 < x_1$, $s(x_0) \neq 0$ et $s(x_1) \neq 0$, une formule qui exprime :

$$(15.10) \quad k(x_0) - k(x_1) = N_x (s = 0 < t) - N_x (s = 0 > t).$$

L'expression $N_x B(x)$ désigne ici le nombre des x tels que $x_0 < x < x_1$

qui satisfont $B(x)$. On exprimera les équations du type $N_x B(x) = k$ à l'aide des quantificateurs. Ainsi, par exemple, l'équation $N_x B(x) = 0$ sera exprimée par $\neg \forall x B(x)$.

Pour établir le théorème de STURM-TARSKI, il faudra calculer les différences $k(x - u) - k(x + u)$ pour des x qui sont solution d'au moins un des termes de la suite de STURM et pour u « suffisamment petit ». Si aucune solution d'au moins un des termes $s_0, \dots, s_i$ ne se trouve entre $x - u$ et $x + u$, on a alors :

$$(15.11) \quad k(x - u) - k(x + u) = 0.$$

Le nombre des changements de signes ne varie pas lorsqu'on passe de $x - u$ à $x + u$, puisque aucun terme de la suite ne change de signe (en vertu de l'axiome (15.6)).

Si x est solution d'un des termes $s_1, \dots, s_i$, le nombre des changements de signes ne varie pas non plus pour un u suffisamment petit. Soit, disons, $s_j(x) = 0$ ($j \geq 1$). On a alors, selon (15.8) et (15.9), les possibilités suivantes pour les signes de $s_{j-1}(x)$, $s_j(x)$ et $s_{j+1}(x)$:

$$+, 0, - \quad \text{ou} \quad -, 0, +.$$

Considérons par exemple la première éventualité. Mettons $x - u$ (ou $x + u$) à la place de x . Les signes seront donc :

$$\text{soit } +, +, - \quad \text{ou} \quad +, -, -$$

$$\text{soit } +, +, - \quad \text{ou} \quad +, +, -$$

$$\text{soit } +, -, - \quad \text{ou} \quad +, +, -$$

$$\text{soit } +, -, - \quad \text{ou} \quad +, -, -.$$

En fait, le nombre des changements de signes ne varie pas et il en sera de même pour la seconde éventualité.

Reste à calculer les différences $k(x - u) - k(x + u)$ pour les solutions de s_0 , c'est-à-dire de s . Soit $s(x) = 0 < t(x)$. On a, pour les signes de $s_0(x)$ et $s_1(x)$, les possibilités $0, +$ ou $0, -$.

Dans le premier cas, lorsqu'on met $x - u$ (ou $x + u$) à la place de x , les signes sont en vertu de (15.7) : $-$, $+$ et $+$, $+$.

On perd donc un changement de signes en passant de $x - u$ à $x + u$, c'est-à-dire que :

$$(15.12) \quad k(x - u) - k(x + u) = 1.$$

Et il en va de même dans le second cas.

Si, en revanche, $s(x) = 0 > t(x)$, (15.7) montre par un raisonnement analogue qu'on gagne un changement de signes :

$$(15.13) \quad k(x - u) - k(x + u) = -1.$$

Les formules (15.11)-(15.13) montrent donc que, en passant par $k(x-u) - k(x+u)$, de x_0 à x_1 , les x tels que $s(x) = 0 < t(x)$ sont comptés positivement et les x tels que $s(x) = 0 > t(x)$ sont comptés négativement. C'est déjà ce qu'exprimait (15.10).

Il faut maintenant calculer $N_x (s = 0 < t)$ à l'aide de (15.10). Si x ne figure pas en t , on obtient le théorème de STURM par (15.10). En effet, en posant par exemple $0 < t$, on a :

$$(15.14) \quad k(x_0) - k(x_1) = N_x (s(x) = 0).$$

Et donc, pour un t arbitraire :

$$(15.15) \quad N_x (s = 0 < t) + N_x (s = 0 > t) = N_x (s = 0).$$

Comme on sait déjà calculer le membre de droite, on obtient N_x

$(s = 0 < t)$ par addition avec (15.10). Pour arriver au $N_x(s = 0 < t)$ cherché, il suffit de montrer que, pour x_0 et x_1 appropriés, on a :

$$N_x(s = 0 < t) = N_x (s = 0 < t).$$

On y parvient en dérivant — par un procédé algébrique bien connu — les formules :

$$(15.16) \quad \begin{cases} \forall x_0 \wedge x \cdot x < x_0 \rightarrow s(x) \neq 0. \\ \forall x_1 \wedge x \cdot x > x_1 \rightarrow s(x) \neq 0. \end{cases}$$

Ce procédé de calcul pour $N_x(s = 0 < t)$ peut sans peine se transformer — si les formules sont explicitées — en un procédé qui fournit une formule de la logique des joncteurs à partir des coefficients de s et de t et telle que son équivalence avec la formule qui exprime $N_x(s = 0 < t) = k$ soit dérivable. Ainsi on peut encore donner pour $\forall x \cdot s = 0 < t$ une formule équivalente de la logique des joncteurs.

Le cas (1) de l'élimination des quantificateurs est ainsi résolu. Pour le cas (2), il faut de même calculer $N_x(s = 0 \wedge t_1 > 0 \wedge \dots \wedge t_n > 0)$, ce qui peut se ramener au calcul du cas (1).

Supposons que nous sachions déjà — pour une condition arbitraire A —

calculer $N_x(t > 0)$. Grâce au cas (1), cette hypothèse est vérifiée pour les conditions $s = 0$. Nous allons maintenant calculer $N_x(t_1 > 0 \wedge t_2 > 0)$. Il suffit pour cela d'établir les équations suivantes :

$$(15.17) \quad \begin{cases} N_x(t_1 > 0 \wedge t_2 > 0) + N_x(t_1 > 0 \wedge t_2 < 0) = N_x(t_1 t_2^2 > 0) \\ N_x(t_1 > 0 \wedge t_2 > 0) + N_x(t_1 < 0 \wedge t_2 > 0) = N_x(t_1^2 t_2 > 0) \\ N_x(t_1 > 0 \wedge t_2 < 0) + N_x(t_1 < 0 \wedge t_2 > 0) = N_x(t_1 t_2 < 0) \end{cases}$$

Par hypothèse, les membres de droite sont calculables. (Pour la troisième ligne, on utilise la relation $t < 0 \leftrightarrow -t > 0$). Le résultat cherché, $N_x(t_1 > 0 \wedge t_2 > 0)$, s'obtient en ajoutant les deux premières équations et en retranchant ensuite la troisième.

Nous disposons ainsi d'un procédé de calcul pour $N_x(t_2 > 0)$. Des applications successives de cette procédure fournissant un moyen de calcul pour $N_x(s = 0 \wedge t_1 > 0 \wedge \dots \wedge t_n > 0)$ et donc l'élimination des quantificateurs dans le cas (2).

Pour le cas (3), il reste à considérer les formules :

$$\forall x. t_1 > 0 \wedge t_2 > 0 \wedge \dots \wedge t_n > 0.$$

L'expression

$$\bigwedge_{x \leq x_0} \bigvee_x t > 0 \rightarrow \bigvee_{x \leq x_0} \bigwedge_x t > 0$$

est dérivable de l'axiome (15.6), puisque l'existence d'une infinité de solutions de t doit découler de

$$\bigwedge_{x \leq x_0} \bigvee_x t > 0 \text{ et } \bigwedge_{x \leq x_0} \bigvee_x t \leq 0.$$

On peut de même dériver

$$\bigwedge_{x \leq x_1} \bigvee_x t > 0 \rightarrow \bigvee_{x \leq x_1} \bigwedge_x t > 0.$$

Il est aussi possible de remplacer dans ces formules $t > 0$ par $t_1 > 0 \wedge \dots \wedge$

$t_n > 0$. En écrivant $B(x)$ à la place de $t_1 > 0 \wedge \dots \wedge t_n > 0$, les deux expressions suivantes sont dérivables :

$$\bigvee_{x \leq x_0} \bigwedge_x B(x) \vee \bigvee_{x \leq x_0} \bigwedge_x \neg B(x)$$

$$\bigvee_{x \geq x_1} \bigwedge_x B(x) \vee \bigvee_{x \geq x_1} \bigwedge_x \neg B(x)$$

Enfin il découle de ceci que

$$(15.18) \quad \bigvee_x B(x) \leftrightarrow \bigvee_{x \leq x_0} \bigwedge_x B(x) \vee \bigvee_{x \geq x_1} \bigwedge_x B(x) \vee$$

$$\bigvee_{x_0 < x_1} \bigvee_{x_0 < x < x_1} \bigwedge_x \neg B(x).$$

est dérivable.

Il est facile de fournir des formules de la logique des joncteurs équivalentes aux premiers termes du membre de droite de ces adjonctions. On dirait, en algèbre, qu'il s'agit des conditions sous lesquelles on a $t(+\infty) > 0$ et $t(-\infty) > 0$ pour un polynôme $t(x)$ (ou pour plusieurs polynômes). On sait qu'il suffit d'une condition qui porte sur le caractère positif ou négatif (selon que le degré du polynôme est pair ou impair) des coefficients les plus élevés.

Supposons maintenant que les négations des deux premiers termes adjonctifs de (15.18) sont dérivables et admettons encore pour commencer que $\bigvee_x B(x)$ est dérivable. La dérivabilité de

$$\bigvee_{x_0 < x_1} \bigvee_{x_0 < x < x_1} B(x) \wedge \neg B(x_0) \wedge \neg B(x_1)$$

découle alors de (15.18).

Pour le polynôme $t = t_1 \cdot t_2 \dots t_n$ on a : $B(x) \rightarrow t(x) > 0$. Il s'ensuit donc par l'axiome (15.6) et par

$$\neg B(x) \rightarrow t_1(x) \leq 0 \vee \dots \vee t_n(x) \leq 0$$

que

$$\bigvee_{x_0 < x_1} t(x_0) = t(x_1) = 0 \wedge \bigwedge_{x_0 < x < x_1} B(x)$$

est dérivable. Et, par le théorème de ROLLE, on a pour le polynôme dérivé t' :

$$\bigvee_x t'(x) = 0 \wedge B(x).$$

Nous avons ainsi établi que

$$(15.19) \quad \bigvee_x B(x) \leftrightarrow \bigvee_x t'(x) = 0 \wedge B(x)$$

est dérivable sous l'hypothèse de la négation des deux premiers termes adjonctifs de (15.18).

On peut, pour le cas (1) ou (2), remplacer le membre de droite de (15.19) par une formule de la logique des joncteurs. Comme ceci vaut aussi pour les deux premiers termes adjonctifs de (15.18), l'élimination des quantificateurs est réglée pour tous les cas. Le procédé général se termine donc par une proposition de la logique des joncteurs équivalente à celle dont on est parti. De plus, si s est un terme constant, $s = 0$ et $s > 0$ sont à considérer sans autre comme équivalents à $\forall$ ou à $\wedge$.

Ainsi est établie la complétude effective de la théorie élémentaire des corps réels fermés.

Parallèlement au principe de LEFSCHETZ, on a ici le principe (d'isonomie) de TARSKI :

Si une proposition arithmétique élémentaire est vraie dans un corps de nombres réels fermé, elle l'est aussi dans tout corps réel.

Une conséquence immédiate de ce principe est que l'*axiome d'Archimède* pour les corps totalement ordonnés :

$$(15.20) \quad \bigwedge x \bigvee_n x < n \cdot 1,$$

qui remonte à EUDOXE (cf. EUCLIDE V, Déf. 4) n'est pas arithmétiquement élémentaire (au sens ci-dessus). Il suffit pour le voir de montrer qu'il n'existe pas de corps réel fermé non archimédien.

Une autre conséquence concerne l'axiome de continuité de la théorie des nombres réels de DEDEKIND qui, dans une formulation simple en terme du concept d'ensemble, devient :

Tout ensemble de nombres réels, non vide et borné inférieurement, a un nombre réel comme borne inférieure.

Si l'on veut formuler cet axiome au sein de la théorie élémentaire des corps totalement ordonnés, il faut le faire sous la forme d'un schéma d'axiomes pour des formules arbitraires $A(x)$ avec une variable libre :

$$(15.21) \quad \bigvee_{x < x_0} \bigwedge_{x < x_0} \neg A(x) \wedge \bigvee_x A(x) \rightarrow \bigvee_{x < x_1} \bigwedge_{x < x_1} \neg A(x) \wedge \bigwedge_{x_2 > x_1} \bigvee_{x < x_2} A(x).$$

La validité de cet axiome — pour tout $A(x)$ — dans un corps réel fermé quelconque et donc, en particulier, dans celui des nombres algébriques réels, résulte du procédé de TARSKI pour éliminer les quantificateurs. On prouve la chose en construisant dans la logique des joncteurs, par élimination des quantificateurs, une formule équivalente à $A(x)$. Celle-ci peut alors s'écrire comme une adjonction de conjonctions de base, avec des termes conjonctifs de la forme $s(x) = 0$ ou $s(x) > 0$. Pour les polynômes en x $s(x)$, les ensembles

$\in_x(s(x) = 0)$ sont finis et les ensembles $\in_x(s(x) > 0)$ ont, s'ils sont bornés inférieurement et non vides, une borne inférieure qui est la plus petite solution de $s(x)$ (axiome (15.6)). La borne inférieure existe donc aussi pour les intersections d'un nombre fini de tels ensembles et se conserve si l'on ajoute un nombre fini de réunions. On obtient ainsi n'importe quel ensemble $\in_x A(x)$ à l'aide d'une formule élémentaire $A(x)$. En particulier pour les nombres algébriques réels, les bornes inférieures de ces ensembles sont toujours des nombres algébriques réels.

Grâce aux « traductions » de la géométrie analytique, le procédé de décision — comme d'ailleurs la complétude et l'isonomie — peut se transporter de la théorie des corps réels fermés à une partie de la géométrie euclidienne. On part pour cela d'une axiomatisation de la géométrie (de celle de HILBERT, par exemple), on laisse de côté l'axiome d'Archimède et on remplace la continuité de DEDEKIND par un schéma d'axiomes qui correspond à (15.21).

OUVRAGES CITÉS

- | | | |
|---------------------------------|------|---|
| BETH, E. W. | 1955 | Semantic entailment and formal derivability, <i>Mededel. d. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch.</i> 18 |
| | 1959 | <i>The Foundations of Mathematics</i> , Amsterdam |
| CHURCH, A. | 1936 | A note on the Entscheidungsproblem, <i>Journ. Symb. Logic</i> 1 |
| DAVIS, M. | 1958 | <i>Computability and Unsolvability</i> , New York |
| FRAENKEL, A.-
BAR-HILLEL, Y. | 1958 | <i>Foundations of Set Theory</i> , Amsterdam |
| GENTZEN, G. | 1934 | Untersuchungen über das logische Schließen, <i>Math. Z.</i> 39 |
| | 1936 | Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, <i>Math. Ann.</i> 112 |
| GÖDEL, K. | 1930 | Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, <i>Mon. hefte f. Mathem. u. Physik</i> 37 |
| | 1931 | Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, <i>Mon. hefte f. Mathem. u. Physik</i> 38 |
| | 1934 | <i>On undecidable propositions of formal mathematical systems</i> , Mimeographed lectures, Princeton, N. J. |
| HASSE, H. | 1923 | Über die Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen im Körper der rationalen Zahlen, <i>Journ. f. d. r. u. ang. Math.</i> 152 |
| HERBRAND, J. | 1931 | Sur la non-contradiction de l'arithmétique, <i>Journ. f. d. r. u. ang. Math.</i> 166 |
| HEYTING, A. | 1930 | Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik, <i>Sitz. Ber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch.</i> |
| HILBERT, D.-
ACKERMANN, W. | 1959 | <i>Grundzüge der theoretischen Logik</i> , 4. Aufl., Heidelberg |
| HILBERT, D.-
BERNAYS, P. | 1934 | <i>Grundlagen der Mathematik I</i> , Berlin |
| | 1939 | <i>Grundlagen der Mathematik II</i> , Berlin |
| KLEENE, S. C. | 1936 | General Recursive Functions of Natural Numbers, <i>Math. Ann.</i> 112 |
| | 1952 | <i>Introduction to Metamathematics</i> , New York |
| LORENZ, K. | 1961 | <i>Arithmetik und Logik als Spiele</i> , Dissertation, Kiel |

- LORENZEN, P. 1955 *Einführung in die operative Logik und Mathematik*,
Heidelberg
1958 *Formale Logik*,
Berlin
- MARKOV, A. A. 1954 *Teorija algorifmov*,
Moskva
- POST, E. L. 1936 Finite combinatory processes-formulation I,
Journ. Symb. Logic 1
1943 Formal reductions of the general combinatorial decision
problem,
Amer. Jour. Math. 65
- ROBINSON, A. 1951 *On the Metamathematics of Algebra*,
Amsterdam
- ROBINSON, J. 1949 Definability and decision problems in arithmetic,
Journ. Symb. Logic 14
- ROBINSON, R. M. 1950 An essentially undecidable axiom system,
Proc. Intern. Congress of Mathem. Cambridge 1952
- ROSSER, J. B. 1935 A mathematical logic without variables,
Ann. of Math. 36
1936 Extensions of some theorems of GÖDEL and CHURCH,
Journ. Symb. Logic 1
- SCHÜTTE, K. 1960 *Beweistheorie*,
Heidelberg
- SKOLEM, Th. 1933 Über die Unmöglichkeit einer vollständigen Charakterisie-
rung der Zahlenreihe mittels eines endlichen Axiomen-
systems,
Norsk mat. for. skrifter 10
- SZMIELEW, W. 1955 Elementary properties of Abelian groups,
Fund. Math. 41
- TARSKI, A. 1933 Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen,
Studia philos. 1, 1936
1948 A decision method for elementary Algebra and Geometry,
The Rand Corporation Santa Monica
1949 On essential undecidability,
Journ. Symb. Logic 14
- TARSKI, A.-
MOSTOWSKI, A.-
ROBINSON, R. M. 1953 *Undecidable Theories*,
Amsterdam
- TURING, A. M. 1936 On computable numbers, with an application to the Ent-
scheidungsproblem,
Proc. London Math. Soc. 42

INDEX DES MATIÈRES

- abstraction (*Abstraktion*) 43
- addition (*Addition*) 50
- adjonction (*Adjunktion*) 16, 20
 - infinie (*unendliche* —) 20
- adjonctive
 - formule — (*Adjunktionsformel*) 35, 62
- admissibilité (*Zulässigkeit*)
 - de la règle de transitivité (— *der Transitivitätsregel*) 72, 75 sqq.
 - des inversions (— *der Inversionen*) 75
- admissible (*zulässig*) 35, 38
- alphabet (*Alphabet*) 84, 86
- analyse (*Analysis*)
 - classique (*klassische* —) 8
- anneau (*Ring*) 136
 - commutatif (*kommutatives* —) 139
 - totalement ordonné (*totalgeordnetes* —) 141
- antécédent (*Vorderglied*) 35
- antécédent (*Vorgänger*) 69, 70
 - suite d'-s (— *folge*) 70
- application (*Abbildung*) 47
- argument (*Argument*) 47
- arithmétique (*Arithmetik*)
 - axiomatique (*axiomatische* —) 12, 52
 - classique (*klassische* —) 52, 60 sqq
 - constructive (*konstruktive* —) 12, 52, 61, 96
- arithmétiquement (*arithmetisch*)
 - énumérable (— *aufzählbar*) 103
 - réalisable (— *darstellbar*) 96, 119
 - représentable (— *vertretbar*) 95, 109
 - vrai (— *wahr*) 51
- arithmétisation (*Arithmetisierung*)
 - des formalismes (— *der Formalismen*) 82 sqq., 131
- arithmétiser (*arithmetisieren*) 102
- atténuation (*Verdünnung*) 73
- axiomatisable (*axiomatisierbar*)
 - de façon décidable (*entscheidbar* —) 121
 - de façon finie (*endlich* —) 121
- axiomatisation (*Axiomatisierung*) 52, 53
- axiome (*Axiom*) 53 sqq, 90
 - d'Archimède (*archimedes* —) 158
 - s d'égalité (*Gleichheits*—e) 41, 42, 144
- système d'— (*ensystem*) 132
- système d'—complet (*vollständiges* — *ensystem*) 53
- biconditionnelle (*Bisubjunktion*) 41
- calcul (*Kalkül*) 11
 - des implications (*Implikationen* —) 18
 - logique (*Logik* —) 11, 28, 38
 - standard (*normierter* —) 91
- calculable (*berechenbar*) 94
- élémentaire — (*elementar* —) 95, 101
- caractéristique (*Charakteristik*) 147
- chiffre (*Ziffer*) 49, 51
- commutativité (*Kommutativität*) 56
- compatibilité (*Verträglichkeit*) 44
- comparativité (*Komparativität*) 42
- complétude (*Vollständigkeit*) 123
 - de l'arithmétique (— *der Arithmetik*) 59, 67, 72
 - du calcul classique des joncteurs (— *des klassischen Funktorenkalküls*) 35 sqq.
 - effective (*effektive* —) 146
 - théorème de — (— *ssatz*) 133
- concept (*Begriff*) 45
- conclusion (*Konklusion*) 31
- conditionnelle (*Subjunktion*)
 - classique (*klassische* —) 18
 - effective (*effektive* —) 23
- conjonction (*Konjunktion*) 16

- de base (*Basis* —) 145
- infinie (*unendliche* —) 21
- conséquent (*Hinterglied*) 35
- consistance (*Widerspruchsfreiheit*) 7 sqq., 60 sqq.
- du formalisme de Peano (— *des Peano-Formalismus*) 72 sqq.
- preuve de — (— *beweis*) 38, 72, 127
- sens de la — (*Sinn der* —) 81
- ω — 72, 117 sqq.
- constantes (*Konstanten*) 25, 79
- continuité (*Stetigkeit*)
 - axiome de — (— *saxiom*) 158
- contraposition (*Kontraposition*) 55 sq.
- corps (*Körper*) 140
 - algébrique fermé (*algebraisch-abgeschlossener* —) 150
 - réel fermé (*reell-abgeschlossener* —) 150
- coupure (*Schnitt*)
 - règle de — (— *regel*) 75
- décidable (*entscheidbar*) 93
 - élémentaire — (*elementar* —) 96, 101
- décision (*Entscheidung*)
 - méthode, procédé de — (— *verfahren*) 15, 93, 130, 135
 - problème de la — (— *sproblem*) 130
- déduction (*Deduktion, Schluss*)
 - théorème de la — (*Deduktionstheorem*) 32, 63
 - effective (*effektiver S.*) 31
 - logique au sens classique (*klassisch-logischer S.*) 17
- défini (*definit*)
 - d-* (*dialogisch* —) 21
 - p-* (*beweis* —) 20 sqq., 55
 - v-* (*wahrheits* —) 15
- définition (*Definition*)
 - fondée (*fundierte* —) 68
 - inductive (*induktive* —) 50
- degré de transcendance (*Transzendenzgrad*) 148
- densité (*Dichte*) 141
- dérivabilité (*Ableitbarkeit*)
 - condition de — (— *sbedingung*) 127
- dérivable (*ableitbar*) 120
 - absolument — (*absolut* —) 32
 - relativement — (*relativ* —) 32
- dérivation (*Ableitung*) 97
- descripteur (*Kennzeichnungsterm*) 48, 59
- dialogue (*Dialog*) 21
 - dans un semi-formalisme (— *im Halbformalismus*) 65 sq.
- état d'un — (— *stand*) 29
- domaine d'intégrité (*Integritätsbereich*) 139
- dualité (*Dualität*) 35
- égalité (*Gleichheit*)
 - abstraite (*abstrakte* —) 44 sq.
 - arithmétique (*arithmetische* —) 146
 - partielle (*partielle* —) 44
 - totale (*totale* —) 44
 - des chiffres (— *von Ziffern*) 41, 49
 - axiomes d'— (— *saxiome*) 51, 144
- ensembles (*Mengen*) 46
 - de base d'une variété (*Grund— eines Gebildes*) 132
- foncteur pour les — (*Verknüpfung für* —) 46
 - représentables (*vertretbare* —) 95
- théorie axiomatique des — (*axiomatische —lehre*) 9, 14, 148
- théorie constructive des — (*konstruktive —lehre*) 9
- énomérable (*aufzählbar*) 92, 117
- équation (*Gleichung*)
 - prédécesseur (*Vorgänger* —) 100
- équivalence (*Äquivalenz*) 17
 - métamathématique (*metamathematische* —) 92
- extension (*Erweiterung*) 120
 - conservante (*konservative* —) 121
 - consistante (*widerspruchsfreie* —) 36-37
 - de même portée (*ausdrucksgleiche* —) 121
 - finie (*endliche* —) 121
 - impropre (*unechte* —) 121
- extensionnel (*extensional*) 128
- foncteur (*Funktor*) 83
- fonction (*Funktion*) 47
 - argumentielle (*Argument* —) 47

- β 97
- caractéristique (*charakteristische*—) 106
- de vérité (*Wahrheits*—) 16
- diagonale (*Diagonal*—) 95
- prédécesseur (*Vorgänger*—) 98
- prédécesseur arithmétique (*arithmetische Vorgänger*—) 103
- propositionnelle (*Aussage*—) 16
- successeur (*Nachfolger*—) 47
- formalisation (*Formalisierung*)
 - de l'arithmétique (— *der Arithmetik*) 59, 82 sqq.
- formalisme (*Formalismus*)
 - complet (*Voll*—) 65, 82, 123
 - de Peano (*Peano*—) 63
 - de Robinson (*Robinson*—) 110
 - incomplet (*unvollständiger* —) 124
- formalismes (*Formalismen*)
 - arithmétiques (*arithmetische* —) 119, 144
 - équivalents (*äquivalente* —) 121
 - universels (*universelle* —) 102
- forme normale (*Normalform*) 96
 - adjonctive (*adjunktive* —) 145
 - prénexe (*pränex* —) 144
- forme propositionnelle (*Aussageform*) 16, 25
 - arithmétique (*arithmetische* —) 21
 - compatible (*verträgliche* —) 44
 - logiquement vraie (*logisch-wahre* —) 11, 16 sqq.
- formules (*Formeln*) 16, 25, 62, 87
 - antécédentes (*Vorder*—) 23
 - atomiques (*Prim*—) 16, 61
 - caractéristiques (*charakterisierende* —) 138
 - conjonctives (*Konjunktions*—) 34, 62
 - conséquentes (*Hinter*—) 23
 - de base (*Basis*—) 145
 - de la logique des joncteurs (*junctionenlogische* —) 16
 - fermées (*geschlossene* —) 25
 - implicatives (*Implikations*—) 33
 - *l*-vraies (*logisch-wahre* —) 16, 23
 - restreintes (*beschränkte* —) 105
- fraction (*Bruch*) 43
- groupe (*Gruppe*) 140
 - commutatif (*kommutative* —) 140
- implication (*Implikation*)
 - arithmétique (*arithmetische* —) 60
 - classique (*klassisch-logische* —) 17, 61, 78, 120
 - classiquement valide (*klassisch-gültige* —) 33
 - critique (*kritische* —) 69, 134
 - fondamentale (*Grund*—) 34, 65
 - logique effective (*effektiv-logische* —) 32
 - effectivement valide (*effektiv-gültige* —) 33
 - matérielle (*materiale* —) 18
 - primitive (*primitive* —) 36, 69
- inclusion (*Inklusion*) 46
- incomplétude (*Unvollständigkeit*)
 - effective (*effektive* —) 124
- théorème d'— (*—satz*) 52, 59, 69, 91, 124 sqq.
- ω — 125
- indécidabilité (*Unentscheidbarkeit*) 92, 95, 138
 - du calcul des quantificateurs (— *des Quantorenkalküls*) 122
 - essentielle (*wesentliche* —) 120
- induction (*Induktion*)
 - axiome d'— (*—saxiom*) 57, 80
 - infinie (*unendliche* —) 65
 - sur les sous-formules (*Teilformel*—) 32, 71, 73 sqq.
- infini (*Unendlichkeit*) 49
- interprétation (*Interpretation*) 17, 132
- inversion (*Inversion*) 75
- isomorphe (*isomorph*) 59, 132
- isonomie (*Isonomie*) 147
- joncteur (*Funktor*) 16
- lettre (*Buchstabe*) 84
- logique (*Logik*)
 - classique (*klassische* —) 12, 60
 - classique des joncteurs (*klassische Funktoren*—) 17, 35
 - effective (*effektive* —) 12, 60

- effective des joncteurs (*effektive Junktoren*—) 36
- formelle (*formale* —) 17
- intuitionniste (*intuitionistische* —) 30
- l-vrai* (*logisch-wahr*)
 - classiquement— (*klassisch*—) 17
 - effectivement— (*effektiv*—) 20
- machines (*Maschinen*) 92
- métaniveau (*Metastufe*) 40, 64
- mathématiques (*Mathematik*)
 - abstraites (*abstrakte* —) 131
- métarègle (*Metaregel*) 40
- modèle (*Modell*) 17, 132
 - abstrait (*abstrakter* —) 132
 - à égalité logique (*gleichheitslogischer* —) 146
 - contre— (*Gegen*—) 133
- monomorphie (*Monomorphie*) 59, 147
- mot (*Wort*) 84, 86
- multiplication (*Multiplikation*) 50
- négation (*Negation*) 15, 21, 24
- nombre (*Nummer*)
 - de Gödel (*Gödel*—) 102
- nombre (*Zahl*)
 - cardinal (*Kardinal*—) 148
 - de pas (*Schritt*—) 67
 - ordinal (*Ordinal*—) 67
 - ordinal transfini (*transfiniten Ordinal* —) 67
 - s algébriques (*algebraische* —en) 148
 - s amis (*befreundete*—en) 22
 - s naturels (*natürliche* —en) 10, 53
 - s rationnels (*rationale* —en) 43
 - s algébriques réels (*reell-algebraische* —en) 150
 - s parfaits (*vollkommene* —en) 18
 - symbole de — (*—symbole*) 41
- non borné (*unberandet*) 147
- objet (*Objekt*)
 - abstrait (*abstrakter* —) 43
 - langue d'— (*—sprache*) 57
 - niveau d'— (*—stufe*) 41
 - variable d'— (*—variable*) 25, 53
- opérateur (*operativ*) 30
- opposant (*Opponent*) 21
- ordre (*Ordnung*)
 - axiome d'— (*—saxiom*) 141
 - total (*Total*—) 141
- particule logique (*logische Partikel*) 13, 26 *sqq.*
- Peano
 - système d'axiomes de — (*—Axiomen-system*) 54
 - système de — (*—System*) 59
 - système de — restreint (*restringierter — System*) 59
- polymorphie (*Polymorphie*) 147
- polynôme (*Polynom*) 149
 - dérivé (*deriviertes* —) 151
- prédicat (*Prädikat*) 87
- préfixe (*Präfix*) 145
- prémisse (*Prämisse*) 29
 - induction sur les —s (*—induktion*) 75 *sq.*
- preuve (*Beweis*) 72, 18-19, 82
- proposant (*Proponent*) 21
- proposition (*Aussage*) 15, 25
 - arithmétique (*arithmetische* —) 49 *sqq.*
 - arithmétique élémentaire (*elementararithmetische* —) 150
 - atomique (*primitive* —) 16
 - élémentaire (*elementare* —) 150
 - s d'inégalité (*Ungleichheits-n*) 49
 - symbole de — (*—symbole*) 16
 - variable de — (*—variable*) 16
- quantificateur (*Quantor*) 25
 - élimination des —s (*—enelimination*) 144
 - existentiel (*Eins*—) 56
 - logique classique des —s (*klassische —enlogik*) 38, 78
 - logique effective des —s (*effektive —enlogik*) 31
 - restreint (*beschränkter* —) 104
 - universel (*All*—) 56, 65, 104
- réalisable (*darstellbar*)
 - au sens restreint (*beschränkt*—) 104
- réalisation, réalisabilité (*Darstellbarkeit*)

- arithmétique (*arithmetische* —) 96, 103
- arithmétique normale (*arithmetische Normal*—) 106
- normale (*normale* —) 107
- récuratif (*rekursiv*)
 - primitif (*primitiv*—) 95
- réflexivité (*Reflexivität*) 42, 74
 - classe de — (*—sklasse*) 44
- règle (*Regel*) 29
- relateur (*Relator*) 86
- relation (*Relation*) 46
 - β 106
 - complémentaire (*komplementäre*—) 101
 - d'appartenance (*Element*—) 46
 - de divisibilité (*Teilbarkeits*—) 104
 - univoque à droite (*rechts-eindeutige* —) 47
- relativisation (*Relativierung*) 138
- représentation, représentabilité (*Vertretbarkeit*) 95, 109, 117
 - fidèle pour la négation (*negations-treue* —) 110, 115
- Robinson
 - axiome de — (*— Axiom*) 110
- sémantique (*Semantik*) 39, 70
- semi-anneau (*Halbring*) 136
- semi-formalisme (*Halbformalismus*) 82
 - arithmétique (*arithmetischer* —) 65, 78, 117
 - sémantique (*semantischer* —) 68
- séquence (*Sequenz*) 29
 - calcul des —s (*—nkalkül*) 31
 - fondamentale (*Grund*—) 29
- sous-formalisme (*Unterformalismus*) 120
- stratégie (*Strategie*)
 - contre— (*Gegen*—) 70
 - de gain (*Gewinn*—) 22, 27 sqq.
- structure (*Struktur*) 131
- substitution (*Substitution*) 87
- support d'une structure (*Träger einer Struktur*) 131
- symbole (*Symbol*)
 - central (*Kern*—) 39
- symétrie (*Symmetrie*) 42
- système (*System*)
 - (complètement) formel (*Voll-formales* —) 91
 - de mots (*Wort*—) 97
- tableau (*Tableau*) 22
 - sous— (*Teil*—) 26
- terme (*Term*) 47, 53, 61, 86
 - mot (*Wort*—) 86
 - primitif (*Prim*—) 53, 61
- théorème (*Satz*)
 - d'indérivabilité (*Unableitbarkeits*—) 126
- théorie (*Theorie*)
 - élémentaire (*elementare* —) 136
- transitivité (*Transitivität*)
 - de l'égalité (*— der Gleichheit*) 42
 - de l'implication logique (*— der logischen Implikation*) 61
 - pour les propositions atomiques (*— für Primaussagen*) 80
- traduction (*Übersetzung*) 137
 - conservante (*konservative* —) 142
 - consistante (*widerspruchsfreie* —) 139
- type (*Typ*) 132
- valeur (*Wert*)
 - d'une fonction (*— einer Funktion*) 47
- variable (*Variable*)
 - condition sur les —s (*—nbedingung*) 37, 62-63
 - libre (*frei vorkommende* —) 25, 88
 - libre pour un terme (*frei für einen Term vorkommende* —) 63, 88
 - liée (*gebundene* —) 63
 - syntaxique (*syntaktische* —) 16
- variété (*Gebilde*) 132
- vérité (*Wahrheit*)
 - arithmétique (*arithmetische* —) 51, 62
 - définition sémantique de la — (*semantische —sdefinition*) 67-68
 - fonction de — (*—sfunktion*) 16
 - logique (*logische* —) 17 sqq.
 - logique effective (*effektiv-logische* —) 23
 - tables de — (*—stafeln*) 16
 - valeur de — (*—swert*) 15

Imprimerie Sainte Catherine, Bruges
Dépôt Légal : 3^{me} trimestre 1967
Numéro d'éditeur : 27

COLLECTION MATHÉMATIQUES
ET SCIENCES DE L'HOMME

B. MATALON

L'analyse hiérarchique

C. FLAMENT

Théorie des graphes et structures sociales

CAHIERS MATHÉMATIQUES I

Exercices corrigés sur des structures élémentaires

P. R. HALMOS

Initiation à la théorie des ensembles

Traduit par J. Gardelle

Sous presse

R. V. ANDREE

Introduction à l'algèbre

Traduit par Madame F. Denizot

H. ROUANET

Modèles stochastiques d'apprentissage

N. CHOMSKY et G. A. MILLER

L'étude formelle des langues naturelles

MOUTON
PARIS - LA HAYE

